Propriété de l'angle au centre

Alain Soyeur[1] and Emmanuel Vieillard-Baron[2]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Propriété de l'angle au centre***

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, on considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω, de rayon $R > 0$ et trois points $A, B, M \in \mathscr{C}$. Prouver la ***propriété de l'angle au centre*** *:*

$$\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) \ [2\pi]$$

Solution : *Quitte à effectuer une translation, on peut supposer que $\Omega = O$. En effectuant une homothétie de centre O et de rapport $1/R$, on peut supposer que $R = 1$ et grâce à une rotation, on peut se ramener au cas où M est le point d'affixe 1. Ces transformations n'affecteront par le résultat car elles conservent les angles orientés. On note a, b, m les affixes respectives des points A, B, M. On sait que $|a| = |b| = 1$ et que $m = 1$. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ des arguments pour a et b. On sait que*

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) = \arg \frac{b}{a} = \arg e^{\beta-\alpha} = \beta - \alpha \ [2\pi]$$

et que

$$\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) = \arg \frac{b-1}{a-1} = \arg \frac{e^{i\beta}-1}{e^{i\alpha}-1} = \arg \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} = \frac{\beta-\alpha}{2} \ [\pi]$$

par factorisation par les angles moitiés. L'argument n'est connu qu'à π près car on ne connaît pas le signe de $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)/\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. On en déduit que $2\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) = \beta - \alpha \ [2\pi] = \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$ et la propriété de l'angle au centre est prouvée.

Références