# Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

***Exercice 0.1*** ★ ***Pas de titre***

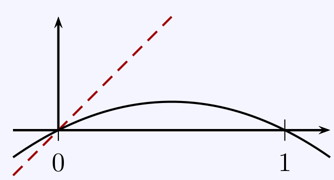
*Soit $u_0 \in [0,1]$. Étudiez la suite définie par la relation de récurrence*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1-u_n)$$

***Solution :*** *Introduisons la fonction* $f : \left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}x \\ & \longmapsto & \dfrac{1}{2}x\,(1-x) \end{array}\right.$. *On montre que pour tout $x \in [0,1]$, $f'(x) = 1/2 - x$. On en déduit les variations de $f$ sur $[0,1]$.*

*L'intervalle $[0,1]$ est stable donc la suite est bien définie et à valeurs dans $[0,1]$. On vérifie facilement que $0$ est le seul point fixe de $f$, que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \leqslant x$ et que $f$ est croissante sur $[0,1/2]$, décroissante sur $[1/2,1]$. Supposons que $u_0 \in [0,1/2]$ alors la suite $(u_n)$ est décroissante. Elle est de plus minorée par $0$ donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge. Sa limite est un point fixe de $f$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Si $u_0 \in ]1/2,1]$ alors $u_1 = f(u_0) \in [0,1/2]$ car $f \leqslant 1/8$ sur $[0,1]$ et on retombe sur le premier cas.*

| $x$ | $0$ | | $1/2$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $1/8$ | $\searrow$ | $0$ |




## Références