Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

11 janvier 2022

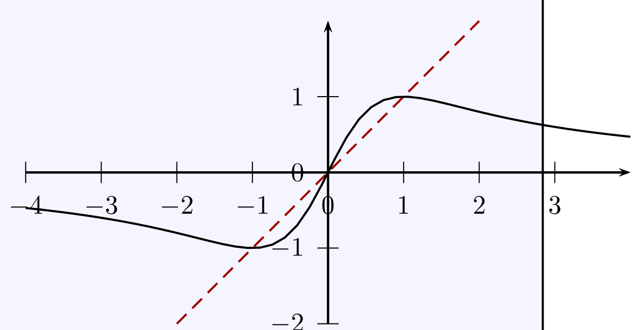
Exercice 0.1 ★ _Pas de titre_

Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n^2}$$

Solution : *Introduisons la fonction* $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}x \\ \longmapsto & \dfrac{2x}{1+x^2} & \end{cases}$. *La suite (u_n) est donnée par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$. On montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. On en déduit les variations de f*

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	↘	-1	↗	1	↘	0



On va donc travailler dans un premier temps sur l'intervalle stable $I = [-1,1]$. Sur I, la fonction f est strictement croissante et ses points fixes sont -1, 0 et 1. En résolvant l'inéquation $f(x) \geqslant x$ sur I on montre que $f(x) \leqslant x$ si $x \in I_1 = [-1,0]$ et que $f(x) \geqslant x$ si $x \in I_2 = [0,1]$. Remarquons que les intervalles I_1 et I_2 sont aussi stables par f. On en déduit alors que :

— *si $u_0 \in I_1$ alors la suite est bien définie et à valeurs dans I_1. De plus, comme $u_0 \geqslant f(u_0)$ et que f est croissante alors (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par -1, d'après le théorème de la limite monotone elle est convergente. Sa limite est forcément un point fixe de f, donc dans ce cas $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$.*

— *si* $u_0 \in I_2$ *alors la suite est bien définie et à valeurs dans* I_2. *Comme* $u_0 \leqslant f(u_0)$ *et que* f *est croissante alors* (u_n) *est croissante. Cette suite est majorée par* 1. *On termine alors comme précédemment, et on montre que dans ce cas* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Si $u_0]-\infty,-1[$ *alors* $u_1 \in I_1$ *et donc on est ramené au premier cas. Si* $u_0]1,+\infty[$ *alors* $u_1 \in I_2$ *et on est ramené au second cas.*

Références