

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

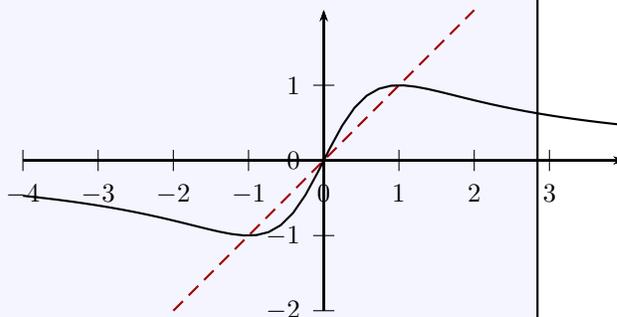
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n^2}$$

Solution : Introduisons la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{2x}{1+x^2} \end{cases}$. La suite (u_n) est donnée par

$u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$. On montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.

On en déduit les variations de f

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0
f	0	\searrow	\nearrow	0



On va donc travailler dans un premier temps sur l'intervalle stable $I = [-1, 1]$. Sur I , la fonction f est strictement croissante et ses points fixes sont $-1, 0$ et 1 . En résolvant l'inéquation $f(x) \geq x$ sur I on montre que $f(x) \leq x$ si $x \in I_1 = [-1, 0]$ et que $f(x) \geq x$ si $x \in I_2 = [0, 1]$. Remarquons que les intervalles I_1 et I_2 sont aussi stables par f . On en déduit alors que :

- si $u_0 \in I_1$ alors la suite est bien définie et à valeurs dans I_1 . De plus, comme $u_0 \geq f(u_0)$ et que f est croissante alors (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par -1 , d'après le théorème de la limite monotone elle est convergente. Sa limite est forcément un point fixe de f , donc dans ce cas $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -1$.

— si $u_0 \in I_2$ alors la suite est bien définie et à valeurs dans I_2 . Comme $u_0 \leq f(u_0)$ et que f est croissante alors (u_n) est croissante. Cette suite est majorée par 1. On termine alors comme précédemment, et on montre que dans ce cas $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

Si $u_0 \in]-\infty, -1[$ alors $u_1 \in I_1$ et donc on est ramené au premier cas. Si $u_0 \in]1, +\infty[$ alors $u_1 \in I_2$ et on est ramené au second cas.

Références