Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

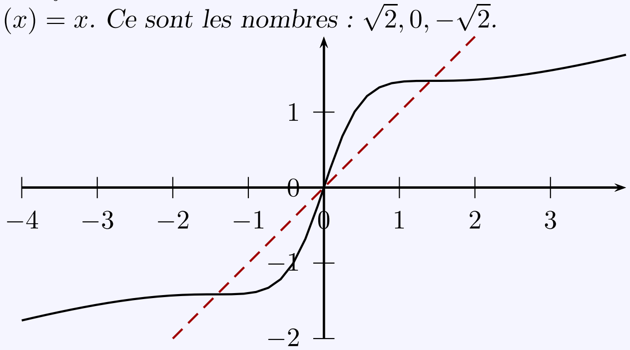
[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

14 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ **Pas de titre**

Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^3 + 6u_n}{3u_n^2 + 2}$.

Solution : *Introduisons la fonction* $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^3+6x}{3x^2+2} \end{cases}$. *La suite* (u_n) *est donnée par* $u_0 \in \mathbb{R}$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. *On montre que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{3\left(x^2-2\right)^2}{\left(3x^2+2\right)^2}$. *Donc* f *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$. *On trouve les points fixes de* f *en résolvant l'équation* $f(x) = x$. *Ce sont les nombres :* $\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}$.



Appliquons maintenant le cours. Les intervalles $I_1 = \left]-\infty, -\sqrt{2}\right]$,$I_2 = \left[-\sqrt{2}, 0\right]$, $I_3 = \left[0, \sqrt{2}\right]$ *et* $I_4 = \left[\sqrt{2}, +\infty\right[$ *sont stables par* f. *Soit* $k \in [\![1,4]\!]$. *Prenons* $u_0 \in I_k$. *La suite* (u_n) *est donc bien définie et à valeurs dans* I_k. *En résolvant l'inéquation* $f(x) \leqslant x$ *sur* $\mathbb{R}$, *on vérifie facilement que*

$$\begin{cases} f(x) \geqslant x & \text{si } x \in I_1 \\ f(x) \leqslant x & \text{si } x \in I_2 \\ f(x) \geqslant x & \text{si } x \in I_3 \\ f(x) \leqslant x & \text{si } x \in I_4 \end{cases}$$

et donc que (u_n) *est croissante si* $u_0 \in I_1 \cup I_3$, *décroissante si* $u_0 \in I_2 \cup I_4$. *Elle est donc à chaque fois* *soit décroissante et minorée, soit croissante et majorée. La suite (u_n) est donc, d'après le théorème de la limite monotone, dans chaque cas convergente et comme sa limite est nécessairement un point fixe de f, on obtient :*

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} -\sqrt{2} & \text{si } u_0 \in I_1 \cup I_2 \\ \sqrt{2} & \text{si } u_0 \in I_3 \cup I_4 \end{cases}.$$

Références