Formule de Stirling

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Formule de Stirling***

1. *Étudier les variations de la fonction* $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ *pour* $x > 0$.
2. *Étudier la fonction définie par* $g(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) . \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{12x(x+1)}$ *pour* $x \geqslant 1$.
   Indication 0.0 : (On pourra, pour étudier le signe de la dérivée seconde, introduire $t = (x+1).x$ *)*
3. *Démontrer que les deux suites* $u_n = \dfrac{n^{n+1/2}}{e^n n!}$ *et* $v_n = u_n . \exp\left(\frac{1}{12n}\right)$ *sont adjacentes. On appelle* ℓ *la limite commune.*
4. *On pose* $w_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$. *Démontrer que la suite* $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est décroissante. Trouver une relation entre* w_n *et* w_{n+2}. *Calculer* w_n. *Démontrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{(2.4.\ldots.2n)^2}{(3.5.\ldots.(2n-1))^2(2n+1)} \leqslant \dfrac{\pi}{2} \leqslant \dfrac{(2.4.\ldots.(2n-2))^2 2n}{(3.5.\ldots.(2n-1))^2}$ *En déduire l'existence de* $L = \displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{n\left[(2n)!\right]^2}$, *et calculer* L.
5. *Calculer* ℓ.
6. *En déduire un encadrement de* $n!$ *pour* $n \geqslant 1$
7. *En déduire un équivalent simple* z_n *de* $n!$. *Donner des valeurs approchées pour* $1000!$ *et pour* z_{1000}
8. *Démontrer que* $w_n \simeq w_{n+1}$.
9. *Calculer* $(n+1).w_n.w_{n+1}$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.
10. *Donner un équivalent de* w_n.

Solution :

1. Pour $x > 0$, $f'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \left(x + \frac{1}{2}\right) \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \times \dfrac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \dfrac{x + \frac{1}{2}}{x(x+1)} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2(x+1)}$.

$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{2(x+1)^2} = -\dfrac{1}{x(x+1)} + \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{2(x+1)^2} = \dfrac{-2x(x+1)+(x+1)^2+x^2}{2x^2(x+1)^2} = \dfrac{(x+1-x)^2}{2x^2(x+1)^2} = \dfrac{1}{2x^2(x+1)^2} > 0.$

On en déduit que f' est croissante sur $]0,+\infty[$. Comme $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$, on en déduit que $\forall x > 0, f'(x) < 0$ et par suite que f est décroissante sur $]0,+\infty[$.

De plus, on a en $+\infty$ $f(x) \sim (x+\frac{1}{2}).\frac{1}{x} \sim 1$. Donc $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$. En particulier, $\forall x > 0, f(x) > 1$.

2. *On a $\forall x > 0, g'(x) = f'(x) + \dfrac{2x+1}{12x^2(x+1)^2} = f'(x) + \dfrac{1}{12x(x+1)^2} + \dfrac{1}{12x^2(x+1)}$.*

   $$g''(x) = f''(x) - \frac{1}{12x^2(x+1)^2} - \frac{2}{12x(x+1)^3} - \frac{1}{12x^2(x+1)^2} - \frac{2}{12x^3(x+1)}$$
   $$= \frac{1}{6}\left(\frac{2}{x^2(x+1)^2} - \frac{1}{x(x+1)^3} - \frac{1}{x^3(x+1)}\right) = \frac{1}{6}\ \frac{2x(x+1)-(x+1)^2-x^2}{x^3(x+1)^3} = -\frac{1}{6x^3(x+1)^3} < 0.$$

   On en déduit que g' est décroissante sur $]0,+\infty[$. Comme $\lim\limits_{x\to\infty} g'(x) = 0$, on en déduit que $\forall x > 0, g'(x) > 0$ et par suite que g est croissante sur $]0,+\infty[$.

   Comme $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 1$. En particulier, $\forall x > 0, g(x) < 1$.

3. *On a, pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^{n+3/2}}{e^{n+1}(n+1)!}\ \dfrac{e^n n!}{n^{n+1/2}} = \dfrac{(n+1)^{n+1/2}}{e}$.*

   Donc $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = f(n) - 1 > 0$. Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

   On a, pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{(n+1)^{n+3/2}}{e^{n+1}(n+1)!}\ \dfrac{e^n n!}{n^{n+1/2}}\ \dfrac{\exp\left(\frac{1}{12(n+1)}\right)}{\exp\left(\frac{1}{12n}\right)} = \dfrac{(n+1)^{n+1/2}}{e}\exp\left(\frac{1}{12(n+1)} - \frac{1}{12n}\right)$. Donc $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = f(n) - 1 - \frac{1}{12n(n+1)} = g(n) - 1 < 0$.

   Donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} < 1$ et donc la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

   Soit enfin $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$, puisque $u_n = v_n.\exp\left(-\frac{1}{12n}\right)$, on en déduit que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers la même limite.

4. **Intégrales de Wallis.** *On a $w_{n+1} - w_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x(\cos x - 1)\,dx$. Comme $\cos^n x(\cos x - 1) \leqslant 0$ on en déduit $w_{n+1} - w_n \leqslant 0$ ce qu'il fallait vérifier.*

   $w_n - w_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x(1 - \cos^2 x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin^2 x\,dx$. On intègre par parties : $\begin{cases} u'(x) = \sin x \cos^n x & u(x) = -\dfrac{1}{n+1}\cos^{n+1} x \\ v(x) = \sin x & v'(x) = \cos x \end{cases}$ D'où $w_n - w_{n+2} = \left[-\dfrac{1}{n+1}\cos^{n+1} x \sin x\right]_0^{\pi/2} + \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} x\,dx = 0 + \dfrac{1}{n+1} w_{n+2}$.

D'où $w_n = \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right) w_{n+2}$ *soit* $w_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} w_n$.

On peut ainsi calculer les w_n *de deux en deux, en partant de* $w_0 = \dfrac{\pi}{2}$ *ou* $w_1 = 1$.

Donc $w_{2n} = \dfrac{2n-1}{2n} w_{2n-2} = \ldots = \dfrac{2n-1}{2n}\,\dfrac{2n-3}{2n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\pi}{2}$.

et $w_{2n+1} = \dfrac{2n}{2n+1} w_{2n-1} = \ldots = \dfrac{2n}{2n+1}\,\dfrac{2n-2}{2n-1}\cdots\dfrac{2}{3}\,1$.

En écrivant $w_{2n+1} \leqslant w_{2n} \leqslant w_{2n-1}$ *on obtient*

$$\frac{2n}{2n+1}\,\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3} \leqslant \frac{2n-1}{2n}\,\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}$$

Soit en multipliant chaque expression par $\dfrac{2n}{2n-1}\,\dfrac{2n-2}{2n-3}\ldots 2$ *on trouve bien le résultat annoncé.*

Maintenant on multiplie en haut et en bas par les facteurs pairs $2, 4, \ldots, 2n$ *(au carré) pour reconstituer les factorielles de* $2n$ *au dénominateur. On obtient alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{(2.4.\ldots.2n)^4}{(2.3.4.5.\ldots.(2n-1)(2n))^2(2n+1)} \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{(2.4.\ldots.(2n-2))^4(2n)^3}{((2.3.4.5.\ldots.(2n-1)(2n))^2}$$

On extrait ensuite les facteurs 2 *pour obtenir les factorielles de* n *au numérateur. On obtient alors :*

$$\frac{(n!)^4}{[(2n)!]^2(2n+1)} \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{(n!)^4}{[(2n)!]^2(2n)}$$

En posant $W_n = \dfrac{2^{4n}(n!)^4}{n\left[(2n)!\right]^2}$, *la première inégalité s'écrit* $W_n \leqslant \dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{2n+1}{n}$ *et la deuxième* $2\,\dfrac{\pi}{2} \leqslant W_n$ *d'après le théorème des gendarmes,* L *existe et vaut* π.

5. *On sait que* $n! \sim \dfrac{1}{\ell}\,\dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}$ *d'où* $(2n)! \sim \dfrac{1}{\ell}\,\dfrac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{e^{2n}}$, *donc, d'après la question précédente,* $\pi \sim \dfrac{2^{4n}(n!)^4}{n\left[(2n)!\right]^2} \sim 2^{4n}\dfrac{1}{\ell^4}\,\dfrac{n^{4n+2}}{e^{4n}}\,\dfrac{1}{n}\,\dfrac{\ell^2 e^{4n}}{(2n)^{4n+1}} \sim \dfrac{2^{4n}}{2^{4n+1}}\,\dfrac{n^{4n+2}}{n^{4n+1}n}\,\dfrac{e^{4n}}{e^{4n}}\,\dfrac{1}{\ell^2} \sim \dfrac{1}{2\ell^2}$. *Puisque* $\ell > 0$, $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
6. *Puisque les suites* u_n *et* v_n *sont adjacentes, on a* $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$, *on a*

$$\frac{n^{n+1/2}}{e^n n!} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \leqslant \frac{n^{n+1/2}}{e^n n!}\exp\left(\frac{1}{12n}\right).$$

Soit

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \leqslant n! \leqslant \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\frac{1}{12n}\right).$$

7. *On en déduit que* $z_n = \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ *est un équivalent (simple) de* $n!$. *(formule de Stirling)*

On a $\log_{10}(z_{1000}) = 2567,60461$ *à* 10^{-5} *près. Donc* $z_{1000} = 10^{2567}\times 10^{0,6046} = 4,0235\times 10^{2567}$. *De même on calcule* $\sum_{k=2}^{1000} \log_{10} k = 2567,60464$ *à* 10^{-5} *près, puis* $1000! = 4,0239 \times 10^{2567}$. *Le facteur correctif vaut* $\exp\left(\frac{1}{12000}\right) = 1+\varepsilon$, *avec* ε *à peu près égal à* $\frac{1}{12000}$ *de l'ordre de* 10^{-4}. *On est donc (largement) dans les clous.*

8. *On a* $w_{n+2} \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n$ *soit* $\dfrac{n+1}{n+2}w_n \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n$ *ou encore* $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{w_{n+1}}{w_n} \leqslant 1$ *donc* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{w_{n+1}}{w_n} = 1$ *soit encore* $w_{n+1} \sim w_n$.
9. *Pour* $n = 0$, $(n+1).w_n.w_{n+1} = 1 \times \dfrac{\pi}{2} \times 1 = \dfrac{\pi}{2}$. *Par ailleurs* $(n+2).w_{n+1}.w_{n+2} = (n+2).w_{n+1}.\dfrac{n+1}{n+2}w_n = (n+1).w_n.w_{n+1}$. *Donc* $(n+1).w_n.w_{n+1}$ *est une suite constante, égale à* $\dfrac{\pi}{2}$.
10. *On a* $\dfrac{\pi}{2} \sim (n+1).w_n.w_{n+1} \sim nw_n^2$. *Donc* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}w_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. *On en déduit* $w_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Références