Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

29 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soit (u_n) une suite qui converge vers 0 et telle que $u_n + u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Trouver un équivalent de u_n.

Indication 0.0 :

- *Si $u_n = \frac{l}{n}$, et vérifie l'hypothèse, que vaut l?.*
- *On fera intervenir une somme télescopique.*

Solution : *Soit $\varepsilon > 0$. Comme $u_n + u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$ alors $\frac{(1-\varepsilon)}{n} \leqslant u_n + u_{2n} \leqslant \frac{(1+\varepsilon)}{n}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut alors écrire :*

$$\frac{(1-\varepsilon)}{2^p n} \leqslant u_{2^p n} + u_{2^{p+1} n} \leqslant \frac{(1-\varepsilon)}{2^p n}.$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{(1-\varepsilon)}{2^k n} \leqslant \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \left(u_{2^k n} + u_{2^{k+1} n}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{(1+\varepsilon)}{2^k n}$$

ce qui amène :

$$\frac{(1-\varepsilon)}{n} \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{2^k} \leqslant u_n + (-1)^p u_{2^{p+1} n} \leqslant \frac{(1+\varepsilon)}{n} \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{2^k}.$$

En utilisant que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et en prenant la limite quand p tend vers $+\infty$ dans les inégalités précédentes, on obtient :

$$\frac{2(1-\varepsilon)}{3n} \leqslant u_n \leqslant \frac{2(1+\varepsilon)}{3n}$$

et donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3n}}$.

Références