

# Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron<sup>1</sup>, Alain Soyeur<sup>2</sup>, and François Capaces<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

<sup>2</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

<sup>3</sup>, ,

24 juin 2023

## Exercice 0.1 ★★★ Pas de titre

Soit  $(u_n)$  une suite qui converge vers 0 et telle que  $u_n + u_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ . Trouver un équivalent de  $u_n$ .

Indication 0.0 :

— Si  $u_n = \frac{l}{n}$ , et vérifie l'hypothèse, que vaut  $l$ ?

— On fera intervenir une somme télescopique.

**Solution :** Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $u_n + u_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ , il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  tel que si  $n \geq N$  alors  $\frac{(1-\varepsilon)}{n} \leq u_n + u_{2n} \leq \frac{(1+\varepsilon)}{n}$ . Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on peut alors écrire :

$$\frac{(1-\varepsilon)}{2^p n} \leq u_{2^p n} + u_{2^{p+1} n} \leq \frac{(1+\varepsilon)}{2^p n}.$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{(1-\varepsilon)}{2^k n} \leq \sum_{k=0}^p (-1)^k (u_{2^k n} + u_{2^{k+1} n}) \leq \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{(1+\varepsilon)}{2^k n}$$

ce qui amène :

$$\frac{(1-\varepsilon)}{n} \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k}{2^k} \leq u_n + (-1)^p u_{2^{p+1} n} \leq \frac{(1+\varepsilon)}{n} \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k}{2^k}.$$

En utilisant que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et en prenant la limite quand  $p$  tend vers  $+\infty$  dans les inégalités précédentes, on obtient :

$$\frac{2(1-\varepsilon)}{3n} \leq u_n \leq \frac{2(1+\varepsilon)}{3n}$$

et donc  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{3n}$ .

**Solution :** on trouve  $l = 2/3$ , en appliquant le th. de Bolzano-Weierstrass, les suites extraites. la solution ci-dessu semble bien plus complique'e

## Références