

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

21 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★★ Pas de titre

Soient (a_n) et (b_n) deux suites à termes strictement positifs. On note $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$. Si $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$ et si la série $\sum b_k$ diverge, montrer que $A_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} B_n$.

Solution : Puisque $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$, $a_n/b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N_0$, on a :

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - 1 \right| \leq \varepsilon$$

et donc puisque (b_n) est strictement positive :

$$(1 - \varepsilon)b_n \leq a_n \leq (1 + \varepsilon)b_n.$$

Donc :

$$(1 - \varepsilon) \sum_{k=N_0}^n b_k \leq \sum_{k=N_0}^n a_k \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=N_0}^n b_k,$$

ce qui s'écrit aussi :

$$(1 - \varepsilon)(B_n - B_{N_0-1}) \leq A_n - A_{N_0-1} \leq (1 + \varepsilon)(B_n - B_{N_0-1})$$

ou encore

$$\left(1 - \varepsilon - \frac{(1 - \varepsilon)B_{N_0-1} - A_{N_0-1}}{B_n} \right) B_n \leq A_n \leq \left(1 + \varepsilon - \frac{(1 + \varepsilon)B_{N_0-1} - A_{N_0-1}}{B_n} \right) B_n$$

Mais comme $B_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 - \varepsilon)B_{N_0-1} - A_{N_0-1}}{B_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \varepsilon)B_{N_0-1} - A_{N_0-1}}{B_n} = 0$. Il existe alors des rangs $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$n \geq N_1 \Rightarrow -\varepsilon \leq \frac{(1 - \varepsilon)B_{N_0-1} - A_{N_0-1}}{B_n} \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad n \geq N_2 \Rightarrow -\varepsilon \leq \frac{(1 + \varepsilon)B_{N_0-1} - A_{N_0-1}}{B_n} \leq \varepsilon.$$

Posons $N = \max(N_0, N_1, N_2)$. On a alors, pour $n \geq N$:

$$(1 - 2\varepsilon) B_n \leq A_n \leq (1 + 2\varepsilon) B_n$$

ce qui prouve que $A_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} B_n$.

Références