Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

4 mai 2023

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soient (a_n) et (b_n) deux suites à termes strictement positifs. On note $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ et si la série $\sum b_k$ diverge, montrer que $A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} B_n$.

Solution : *Puisque $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, $a_n/b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N_0$, on a :*

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon$$

et donc puisque (b_n) est strictement positive :

$$(1-\varepsilon)b_n \leqslant a_n \leqslant (1+\varepsilon)b_n.$$

Donc :

$$(1-\varepsilon)\sum_{k=N_0}^{n} b_k \leqslant \sum_{k=N_0}^{n} a_k \leqslant (1+\varepsilon)\sum_{k=N_0}^{n} b_k,$$

ce qui s'écrit aussi :

$$(1-\varepsilon)\left(B_n - B_{N_0-1}\right) \leqslant A_n - A_{N_0-1} \leqslant (1+\varepsilon)\left(B_n - B_{N_0-1}\right)$$

ou encore

$$\left(1-\varepsilon-\frac{(1-\varepsilon)\,B_{N_0-1} - A_{N_0-1}}{B_n}\right)B_n \leqslant A_n \leqslant \left(1+\varepsilon-\frac{(1+\varepsilon)\,B_{N_0-1} - A_{N_0-1}}{B_n}\right)B_n$$

Mais comme $B_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(1-\varepsilon)\,B_{N_0-1} - A_{N_0-1}}{B_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(1+\varepsilon)\,B_{N_0-1} - A_{N_0-1}}{B_n} = 0$. Il existe alors des rangs $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$n \geqslant N_1 \Rightarrow -\varepsilon \leqslant \frac{(1-\varepsilon)\,B_{N-1} - A_{N-1}}{B_n} \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad n \geqslant N_2 \Rightarrow -\varepsilon \leqslant \frac{(1+\varepsilon)\,B_{N-1} - A_{N-1}}{B_n} \leqslant \varepsilon.$$

Posons $N = \max(N_0, N_1, N_2)$*. On a alors, pour* $n \geqslant N$ *:*

$$(1 - 2\varepsilon)\, B_n \leqslant A_n \leqslant (1 + 2\varepsilon)\, B_n$$

ce qui prouve que $\boxed{A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} B_n}$.

Références