# Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

11 mai 2023

***Exercice 0.1*** ★★★ ***Pas de titre***

*Trouver un équivalent simple de la suite de terme général*

$$u_n = \left[\tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}\right)\right]^n$$

***Solution :*** *Sous forme exponentielle :*

$$u_n = e^{n\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n}\right)\right)}$$

*puis avec les formules d'addition :*

$$u_n = e^{n\ln\frac{\sqrt{3}+\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{1-\sqrt{3}\tan\left(\frac{1}{n}\right)}} = e^{n\ln\left(\sqrt{3}\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{1-\sqrt{3}\tan\left(\frac{1}{n}\right)}\right)} = e^{n\ln\sqrt{3}}e^{n\ln\left(\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{1-\sqrt{3}\tan\left(\frac{1}{n}\right)}\right)} = \left(\sqrt{3}\right)^n e^{n\ln\left(1+\frac{4\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{1-\sqrt{3}\tan\left(\frac{1}{n}\right)}\right)}$$

*On cherche alors la limite de* $a_n = n\ln\left(1+\frac{4\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{1-\sqrt{3}\tan\left(\frac{1}{n}\right)}\right)$*. Avec les équivalents usuels :*

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\frac{4\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{1-\sqrt{3}\tan\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 4n\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{1}{n} = 4\frac{\sqrt{3}}{3}$$

*donc* $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4\sqrt{3}/3$*. Il vient alors par composition de limite :*

$$e^{n\ln\left(1+\frac{4\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{1-\sqrt{3}\tan\left(\frac{1}{n}\right)}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

*donc*

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{3})^n e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}}}$$

# Références