

# Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron<sup>1</sup>, Alain Soyeur<sup>2</sup>, and François Capaces<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

<sup>2</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

<sup>3</sup>, ,

24 juin 2023

## Exercice 0.1 ★★★ Pas de titre

Trouver un équivalent simple de la suite de terme général

$$u_n = \left[ \tan \left( \frac{\pi}{3} + \frac{1}{n} \right) \right]^n$$

**Solution :** Sous forme exponentielle :

$$u_n = e^{n \ln(\tan(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}))}$$

puis avec les formules d'addition :

$$u_n = e^{n \ln \frac{\sqrt{3} + \tan(\frac{1}{n})}{1 - \sqrt{3} \tan(\frac{1}{n})}} = e^{n \ln \left( \sqrt{3} \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \tan(\frac{1}{n})}{1 - \sqrt{3} \tan(\frac{1}{n})} \right)} = e^{n \ln \sqrt{3}} e^{n \ln \left( \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \tan(\frac{1}{n})}{1 - \sqrt{3} \tan(\frac{1}{n})} \right)} = (\sqrt{3})^n e^{n \ln \left( 1 + \frac{4\sqrt{3}}{3} \frac{\tan(\frac{1}{n})}{1 - \sqrt{3} \tan(\frac{1}{n})} \right)}$$

On cherche alors la limite de  $a_n = n \ln \left( 1 + \frac{4\sqrt{3}}{3} \frac{\tan(\frac{1}{n})}{1 - \sqrt{3} \tan(\frac{1}{n})} \right)$ . Avec les équivalents usuels :

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \frac{4\sqrt{3}}{3} \frac{\tan(\frac{1}{n})}{1 - \sqrt{3} \tan(\frac{1}{n})} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 4n \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{1}{n} = 4\sqrt{3}$$

donc  $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 4\sqrt{3}$ . Il vient alors par composition de limite :

$$e^{n \ln \left( 1 + \frac{4\sqrt{3}}{3} \frac{\tan(\frac{1}{n})}{1 - \sqrt{3} \tan(\frac{1}{n})} \right)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (\sqrt{3})^n e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

**Références**