Construction à la règle et au compas du pentagone régulier

Alain Soyeur[1] and Emmanuel Vieillard-Baron[2]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris

6 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Construction à la règle et au compas du pentagone régulier***

1. (a) i. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $z^5 = 1 \quad (*)$.
   ii. *Posons* $\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. *Montrer que l'ensemble solution de l'équation* $(*)$ *est :* $\left\{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\right\}$.
   iii. *Représenter* $\left\{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\right\}$ *dans le plan complexe.*
   iv. *Calculer :* $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$.

   (b) *On pose* $\alpha = \omega + \omega^4$ *et* $\beta = \omega^2 + \omega^3$.
   i. *Déduire de 1(a)iv que* α *et* β *sont solutions de* $Z^2 + Z - 1 = 0 \quad (**)$.
   ii. *Exprimer alors* α *en fonction de* $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ *et* β *en fonction de* $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

   (c) *Résoudre l'équation* $(**)$ *et en déduire une valeur exacte de* $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

2. (a) *On désigne par* A_0, A_1, A_2, A_3 *et* A_4 *les points d'affixe respective* 1, ω, ω^2, ω^3 *et* ω^4.
   i. *Par quelle transformation simple passe-t-on de* A_0 *à* A_1 *? puis de* A_1 *à* A_2 *? Généraliser ce résultat.*
   ii. *Quelle est l'abscisse du point* H *intersection de la droite* (A_1A_4) *avec l'axe des abscisses ?*

   (b) *Soit* $\mathscr{C}$ *le cercle de centre* Ω *d'affixe* $-\frac{1}{2}$ *et passant par le point* B *d'affixe* i. *On désigne par* M *et* N *les points où* $\mathscr{C}$ *rencontre l'axe des abscisses,* M *ayant une abscisse positive.*
   i. *Prouver que* M *a pour affixe* α *et que* N *a pour abscisse* β.
   ii. *Prouver que* H *est le milieu de* $[OM]$.
   iii. *Déduire de ce qui précède la construction à la règle et au compas d'un pentagone dont on connaît le centre* O *et un sommet* A_0. *Effectuer cette construction en se plaçant dans un repère orthonormal direct* $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ *avec* $\overrightarrow{\imath} = \overrightarrow{OA_0}$.

Solution :

1. (a) i. *Les solutions dans* $\mathbb{C}$ *de l'équation* $z^5 = 1$ *sont les* 5 *racines cinquièmes de l'unité :* $e^{\frac{2ik\pi}{5}}, \quad k \in [\![0,4]\!]$.
   ii. *Il est clair que* $\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. *Il est aussi clair que, pour tout* $k \in [\![0,4]\!]$, $e^{\frac{2ik\pi}{5}} = \omega^k$.
   iii. *Voir* **??** *page* **??**.
   iv. *On reconnaît une somme géométrique de raison* ω *donc :* $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = \left(1-w^5\right)/(1-\omega)$ *mais comme* $\omega^5 = 1$, *il vient :* $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = 0$.

   (b) *Posons* $\alpha = \omega + \omega^4$ *et* $\beta = \omega^2 + \omega^3$.
   i. *On a :* $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ *et* $\omega^4 = e^{\frac{8i\pi}{5}} = e^{-\frac{2i\pi}{5}}$. *Il est alors clair que* $\overline{w} = \omega^4$. *De même,* $\omega^2 = e^{\frac{4i\pi}{5}}$ *et* $\omega^3 = e^{\frac{6i\pi}{5}} = e^{\frac{-4i\pi}{5}} = \overline{\omega^2}$.
   ii. *On a* $\alpha^2+\alpha-1 = \left(\omega+\omega^4\right)^2 + \left(\omega+\omega^4\right) - 1 = \omega^2 + 2\omega^5 + \omega^8 + \omega + \omega^4 - 1 = \omega^2 + 2 + \omega^3 + \omega + \omega^4 - 1 = 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$. *Donc* α *est solution de* $Z^2 + Z - 1 = 0$. *On fait de même pour* β.
   iii. *On a* $\alpha = \omega + \omega^4 = \omega + \overline{\omega} = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ *et* $\beta = \omega^2 + \omega^3 = \omega^2 + \overline{\omega^2} = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

   (c) *Les racines de* $Z^2 + Z - 1$ *sont* $\left(-1-\sqrt{5}\right)/2$ *et* $\left(-1+\sqrt{5}\right)/2$. *Comme* $\frac{2\pi}{5} \in]0, \pi/2[$ *et que* $\frac{4\pi}{5} \in]\pi/2, \pi[$, *il vient :* $\cos\frac{2\pi}{5} = \left(-1+\sqrt{5}\right)/4$ *et* $\cos\frac{4\pi}{5} = \left(-1-\sqrt{5}\right)/4$.

2. (a) i. *On passe de* A_0 *à* A_1, *puis de* A_1 *à* A_2, *puis de* A_i *à* A_{i+1} *par une rotation de centre* O *et d'angle* $2\pi/5$.
   ii. *L'abscisse du point* H *intersection de la droite* (A_1A_4) *est l'abscisse de* A_1 *qui vaut* $\cos\frac{2\pi}{5} = \left(-1+\sqrt{5}\right)/4$.

   (b) i. *Par application du théorème de Pythagore dans le triangle* ΩOJ, *on obtient que le rayon du cercle est* $\sqrt{5}/2$. *Donc l'affixe de* M *est* $-1/2 + \sqrt{5}/2 = \alpha$ *et l'affixe de* N *est* $-1/2 - \sqrt{5}/2 = \beta$
   ii. *L'affixe du milieu de* $[OM]$ *est* $(0+\alpha)/2 = (-1+\sqrt{5})/4$ *ce qui correspond à l'affixe de* H..
   iii. *Pour construire un pentagone régulier à la règle et au compas, on commence par tracer le cercle unité* $\mathscr{C}_0$ *de centre* O *et passant par* A_0. *On place ensuite le point* B *d'affixe* i *et le point* Ω *d'affixe* $-1/2$. *On trace le* $\mathscr{C}$ *et le milieu* Ω *passant par* B *ce qui nous permet de construire les points* M *et* N. *On lève les perpendiculaires à l'axe des abscisses passant par* M *et* N. *Ces perpendiculaires intersectent le cercle unité en les points* A_1, A_2, A_3 *et* A_4.

Références