

Construction à la règle et au compas du pentagone régulier

Emmanuel Vieillard-Baron¹ and Alain Soyeur²

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

2 juillet 2022

Exercice 0.1 ★ Construction à la règle et au compas du pentagone régulier

1. (a)
 - i. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^5 = 1$ (*).
 - ii. Posons $\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. Montrer que l'ensemble solution de l'équation (*) est : $\{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$.
 - iii. Représenter $\{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$ dans le plan complexe.
 - iv. Calculer : $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$.
 - (b) On pose $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.
 - i. Dédire de 1(a)iv que α et β sont solutions de $Z^2 + Z - 1 = 0$ (**).
 - ii. Exprimer alors α en fonction de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et β en fonction de $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.
 - (c) Résoudre l'équation (**) et en déduire une valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
2. (a) On désigne par A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 les points d'affixe respective $1, \omega, \omega^2, \omega^3$ et ω^4 .
 - i. Par quelle transformation simple passe-t-on de A_0 à A_1 ? puis de A_1 à A_2 ? Généraliser ce résultat.
 - ii. Quelle est l'abscisse du point H intersection de la droite (A_1A_4) avec l'axe des abscisses ?
 - (b) Soit \mathcal{C} le cercle de centre Ω d'affixe $-\frac{1}{2}$ et passant par le point B d'affixe i . On désigne par M et N les points où \mathcal{C} rencontre l'axe des abscisses, M ayant une abscisse positive.
 - i. Prouver que M a pour affixe α et que N a pour abscisse β .
 - ii. Prouver que H est le milieu de $[OM]$.
 - iii. Dédire de ce qui précède la construction à la règle et au compas d'un pentagone dont on connaît le centre O et un sommet A_0 . Effectuer cette construction en se plaçant dans un repère orthonormal direct (O, \vec{i}, \vec{j}) avec $\vec{i} = \overrightarrow{OA_0}$.

Références