Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

1. *Soit la suite de terme général*

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} e^{k^2}.$$

   Montrez que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{n^2}$.

2. *Trouvez un équivalent de* $v_n = \sum_{k=0}^{n} k!$.

Solution :

1. *On met* e^{n^2} *en facteur dans la somme :*

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} e^{k^2} = e^{n^2}\left(e^{-n^2} + e^{1-n^2} + e^{2^2-n^2} + \cdots + e^{(n-1)^2-n^2} + 1\right).$$

   Mais

$$0 \leqslant e^{-n^2} + e^{1-n^2} + e^{2^2-n^2} + \cdots + e^{(n-1)^2-n^2} \leqslant ne^{(n-1)^2-n^2} = ne^{-2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

   donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{n^2}}$

2. *On écrit :*

$$\sum_{k=0}^{n} k! = n!\left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{n!}\right).$$

   Mais pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, $\dfrac{(n-k)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)\dots(n-k+1)} < \dfrac{1}{n(n-1)}$ *donc*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{n!} = \frac{0!}{n!} + \cdots + \frac{(n-2)!}{n!} + \frac{(n-1)!}{n!} \leqslant \frac{n-1}{n\,(n-1)} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$$

   et d'après le théorème des gendarmes, $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *En conclusion* $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n!}$.

Références