Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

Utiliser des équivalents ou des croissances comparées pour étudier la convergence des suites suivantes.

1. $u_n = n\left(e^{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} - 1\right) + (\ln n)^{\frac{1}{n}}$
2. $u_n = \sqrt{n^4+4} - n^2$
3. $u_n = \sqrt[4]{n^4+4} - n$
4. $u_n = \dfrac{\cos n - n^2}{2^n + n\sin n}$
5. $u_n = \left(\dfrac{1-1/n}{\cos(1/n)}\right)^n$
6. $u_n = \left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)^n$

Solution :

1. *D'une part,* $n\left(e^{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\frac{\pi}{n} = \pi$. *D'autre part :* $(\ln n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln(\ln n)}{n}}$ *et* $\frac{\ln(\ln n)}{n} = \frac{\ln n}{n}\frac{\ln(\ln n)}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *Finalement* $(\ln n)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = 1$ *et :* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{\pi+1}$.
2. *Pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *:*
$$u_n = \sqrt{n^4+4} - n^2 = \frac{\left(\sqrt{n^4+4}-n^2\right)\left(\sqrt{n^4+4}+n^2\right)}{\sqrt{n^4+4}+n^2} = \frac{4}{\sqrt{n^4+4}+n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{0}$$
3. *Pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *:*
$$u_n = \sqrt[4]{n^4+4} - n = \frac{\left(\sqrt[4]{n^4+4}-n\right)\left(\sqrt[4]{n^4+4}+n\right)}{\sqrt[4]{n^4+4}+n} = \frac{\sqrt{n^4+4}-n^2}{\sqrt[4]{n^4+4}+n}.$$
En utilisant la question précédente, le numérateur tend vers 0 *et il est facile de montrer que le dénominateur tend vers* $+\infty$. *La suite tend donc vers* $\boxed{0}$.

4. $u_n = \dfrac{\cos n - n^2}{2^n + n\sin n} = \dfrac{n^2}{2^n}\dfrac{\dfrac{\cos n}{n^2} - 1}{1 + \dfrac{n\sin n}{n^2}}$. *Mais, en utilisant le théorème des gendarmes et les croissances comparées, on montre facilement que* $\frac{\cos n}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et* $\frac{n\sin n}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *Par conséquent, comme* $n^2 = \underset{n\to+\infty}{o}(2^n)$, *il est clair que* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{0}$.

5. *Écrivons* $u_n = e^{a_n}$ *avec*

$$a_n = n\ln\left(\frac{1-\dfrac{1}{n}}{\cos\dfrac{1}{n}}\right) = n\ln\left(1 + \frac{1-\dfrac{1}{n} - \cos\dfrac{1}{n}}{\cos\dfrac{1}{n}}\right)$$

et comme $1 - \cos\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(-\dfrac{1}{n}\right)$, *il vient que*

$$\frac{1-\dfrac{1}{n} - \cos\dfrac{1}{n}}{\cos\dfrac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Et par conséquent,

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \text{ et } \boxed{u_n \to \boxed{\frac{1}{e}}}$$

6. $u_n = \left(1 + \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}$ *et* $1 + \sqrt{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$ *donc* $n\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ *et il en est de même de* u_n.

Références