Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

Utiliser des équivalents ou des croissances comparées pour étudier la convergence des suites suivantes.

1. $u_n = n^2\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}-1\right)$
2. $u_n = \left(\dfrac{n}{n-x}\right)^n$ où $x \in \mathbb{R}$.
3. $u_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ où $a \in \mathbb{R}$.
4. $u_n = \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n$
5. $u_n = \sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n}$
6. $u_n = \frac{2^{n+4}-5^{n+4}}{2^n-5^n}$

Solution :

1. $u_n = n^2\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}-1\right) = n^2\left(\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2 \times \frac{-1}{2n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{-\dfrac{1}{2}}$. *On peut aussi utiliser les racines conjuguées.*
2. *La suite est définie à partir d'un certain rang ($n \geqslant E(x)+1$). Écrivons-la sous forme exponentielle :*
$$u_n = e^{n\ln\left(\dfrac{n}{n-x}\right)} = e^{-n\ln\left(\dfrac{n-x}{n}\right)} = e^{-n\ln\left(1-\dfrac{x}{n}\right)}$$
Comme $\dfrac{x}{n} \to 0$, *on peut utiliser les équivalents classiques et alors* $-n\ln\left(1-\dfrac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} x$ *et donc* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{e^x}$.
3. $u_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)}$ *mais* $n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\frac{a}{n} = a$ *donc* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{e^a}$.
4. *Pour tout* $n \geqslant 1$,
$$u_n = \left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^n = e^{n\ln\frac{2n-1}{2n+1}} = e^{n\ln\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)}$$
mais $n\ln\left(1-\frac{2}{2n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{2n}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$ *donc* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{1/e}$.

5. *En utilisant les quantités conjuguées, puis en factorisant en haut et en bas par* $\sqrt{n}$, *on trouve que* $\forall n > 0$,

$$u_n = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^{3/2}}}}+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{\frac{1}{2}}$$

6. $u_n = \frac{2^{n+4}-5^{n+4}}{2^n-5^n} = \frac{5^{n+4}}{5^n}\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{n+4}-1}{\left(\frac{2}{5}\right)^{n}-1}$ *mais* $\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$ *et* $\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{n+4}\right)$ *sont des suites géométriques de raison* $\frac{2}{5} \in \left]-1,1\right[$ *et donc elles convergent vers* 0. *On obtient alors* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{5^4}$.

Références