Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Utiliser des équivalents ou des croissances comparées pour étudier la convergence des suites suivantes.

1. $u_n = \left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^n$
2. $u_n = (5n+1)^2 \ln\left(1+\frac{1}{3n^2}\right)$
3. $u_n = n^2\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n^4+n^2+1}\right)}$
4. $u_n = 5^n \tan\left(\frac{\pi}{5^n}\right)$
5. $u_n = \sqrt[n]{n}$
6. $u_n = n\ln\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$

Solution :

1. $u_n = \left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)}$ *mais* $\sin\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et*
$$n\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\sin\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\times\frac{1}{n} = 1$$
Par conséquent $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{e}$.
2. $u_n = (5n+1)^2\ln\left(1+\frac{1}{3n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(5n+1)^2}{3n^2} = \frac{n^2}{n^2}\frac{\left(5+\frac{1}{n}\right)^2}{3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{\frac{25}{3}}$
3. $u_n = n^2\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n^4+n^2+1}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{\sqrt{n^4+n^2+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{1}$
4. $u_n = 5^n\tan\left(\frac{\pi}{5^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 5^n\frac{\pi}{5^n} = \pi$ *donc* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{\pi}$.
5. $u_n = \sqrt[n]{n} = e^{\frac{lnn}{n}}$ *mais* $\ln n = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$ *donc* $\frac{lnn}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et par composition* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = \boxed{1}$.
6. *Écrivons pour* $n\in\mathbb{N}$ *:*
$$u_n = \frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)$$
Comme $\frac{2}{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\ln(1+\frac{2}{n-1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$ *et donc* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{1}$.

Références