Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Utiliser des équivalents ou des croissances comparées pour étudier la convergence des suites suivantes.

1. $u_n = \frac{5^n - n^4}{n!}$
2. $u_n = n \sin \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$
3. $u_n = \left(e^{1/n}\right)^{n \ln\left(\cos(1/n)\right)}$
4. $u_n = n^{\frac{1}{\ln n}}$
5. $u_n = n\left(\sqrt{1+\sin(1/n)} - \cos(1/n)\right)$
6. $u_n = n^{2\frac{\sin n}{n}}$

Solution :

1. *Comme* $5^n = \underset{n\to+\infty}{o}(n!)$ *et* $n^4 = \underset{n\to+\infty}{o}(n!)$, *on a :* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{0}$.
2. $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ *et donc :* $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *ce qui permet d'écrire :*
   $u_n = n \sin \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1$ *et* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{1}$.
3. $u_n = \left(e^{1/n}\right)^{n \ln\left(\cos(1/n)\right)} = e^{\ln(\cos(1/n))} = \cos(1/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{1}$.
4. $u_n = n^{\frac{1}{\ln n}} = e^{\frac{\ln n}{\ln n}} = e$.
5. *Ecrivons*
   $$u_n = n\left(a_n + b_n\right)$$
   avec
   $$a_n = \sqrt{1+\sin(1/n)} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$
   et
   $$b_n = 1 - \cos(1/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$
   Donc puisque $b_n = \underset{n\to+\infty}{o}(a_n)$, , *par application du résultat prouvé dans l'exercice* **??**,
   $b_n + a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$. *Par conséquent* $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}}$ *et donc* $u_n \to \frac{1}{2}$.

6. $u_n = n^{2\frac{\sin n}{n}} = e^{2\frac{\sin n}{n}\ln n}$ *mais pour tout* $n > 0$, $-\frac{\ln n}{n} \leqslant \sin n \frac{\ln n}{n} \leqslant \frac{\ln n}{n}$ *(car* sin *est à image dans* $[-1,1]$ *et que* $\ln n/n \geqslant 0$ *si* $n \geqslant 1$ *) et* $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *car* $\ln n = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$. *Donc par application du théorème des gendarmes,* $\sin n \frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *Par composition,* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = \boxed{1}$.

Références