# Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

**Exercice 0.1** ★★ **Pas de titre**

*Donner des équivalents simples lorsque $n$ tend vers $+\infty$ pour les suites de terme général :*

1. $u_n = \ln(n+1) - \ln n$
2. $u_n = \frac{2n^3 - \ln n + 1}{n^2+1}$
3. $u_n = (n+1)^\alpha - (n-1)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. $u_n = \dfrac{n^2 + n\ln(1-e^{-n})}{n^2+1}$
5. $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}$
6. $u_n = \dfrac{e^{2n} + n^2 + \frac{1}{n}}{e^{n^2}\tan\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1+\ln\left(1+\operatorname{sh}\frac{1}{n}\right)} - 1\right)$

***Solution :***

1. $u_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\dfrac{n+1}{n} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

2. $u_n = \frac{2n^3-\ln n+1}{n^2+1} = \frac{2n^3}{n^2}\dfrac{1-\frac{\ln n}{2n^3}+\frac{1}{2n^3}}{1+\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$ car $\dfrac{1-\frac{\ln n}{2n^3}+\frac{1}{2n^3}}{1+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

3. $u_n = (n+1)^\alpha - (n-1)^\alpha = (n-1)^\alpha\left(\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^\alpha - 1\right) = (n-1)^\alpha\left(\left(1+\dfrac{2}{n-1}\right)^\alpha - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} (n-1)^\alpha\dfrac{2\alpha}{n-1} = \boxed{2\alpha\,(n-1)^{\alpha-1}}$. *Remarquons que si on factorise ainsi :* $u_n = (n+1)^\alpha\left(1-\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^\alpha\right)$, *on trouve que* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\alpha\,(n+1)^{\alpha-1}$ *qui est bien entendu équivalent à l'équivalent trouvé avant.*

4. $u_n = \dfrac{n^2+n\ln(1-e^{-n})}{n^2+1} = \dfrac{1+\frac{\ln(1-e^{-n})}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{1}$ car $\dfrac{\ln(1-e^{-n})}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{e^{-n}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

5. $u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}} = \dfrac{n}{n^{\frac{3}{2}}}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{n^{\frac{1}{3}}}$ car $\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

6. *En appliquant les formules usuelles pour les équivalents :* $\left(\sqrt{1+\ln\left(1+\operatorname{sh}\frac{1}{n}\right)}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

   *Par conséquent :* $u_n = \dfrac{e^{2n}+n^2+\frac{1}{n}}{e^{n^2}\tan\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1+\ln\left(1+\operatorname{sh}\frac{1}{n}\right)}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}\dfrac{e^{2n}+n^2+\frac{1}{n}}{e^{n^2}\tan\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}\dfrac{e^{2n}+n^2+\frac{1}{n}}{e^{n^2}\frac{1}{n}} = \frac{e^{2n-n^2}}{2}\left(1+\dfrac{n^2}{e^{2n}}+\dfrac{1}{ne^{2n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\dfrac{e^{2n-n^2}}{2}}$

   *car* $1+\dfrac{n^2}{e^{2n}}+\dfrac{1}{ne^{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

# Références