Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

13 mai 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Donner des équivalents simples lorsque n tend vers $+\infty$ pour les suites de terme général :

1. $u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$
2. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
3. $u_n = \dfrac{\ln(n+1) - \ln n}{\tan \frac{1}{n}}$
4. $u_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1}$
5. $u_n = n \sin \frac{1}{n^2}$
6. $u_n = \dfrac{\left(\sin \frac{1}{n}\right)^{\sin \frac{1}{n}} - 1}{\left(\tan \frac{1}{n}\right)^{\tan \frac{1}{n}} - 1}$

Solution :

1. $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2}{(n-1)(n+1)} = \frac{2}{n^2} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\dfrac{2}{n^2}}$ *car* $\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$
2. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \dfrac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$ *car* $\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$
3. $\dfrac{\ln(n+1) - \ln n}{\tan \frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n+1) - \ln n}{\frac{1}{n}} = n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{1}$ *par quotient et produit d'équivalents.*
4. $u_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1} = \dfrac{\ln n^2 + \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n+1} = \dfrac{\ln n^2}{n} \dfrac{1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\ln n^2}}{1+\dfrac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\dfrac{2\ln n}{n}}$ *car* $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ *et donc* $\dfrac{1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\ln n^2}}{1+\dfrac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

5. $u_n = n \sin \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\frac{1}{n^2} = \boxed{\dfrac{1}{n}}$ *par produit d'équivalents.*

6. *Considérons*

$$a_n = \left(\sin \frac{1}{n}\right)^{\sin \frac{1}{n}} - 1 = e^{\sin \frac{1}{n} \ln \sin \frac{1}{n}} - 1.$$

Comme $x \ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ *et que* $\sin \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *il vient que :* $\sin \frac{1}{n} \ln \sin \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et donc* $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin \frac{1}{n} \ln \sin \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln \sin \frac{1}{n}}{n}$. *On montre de même que*

$$b_n = \left(\tan \frac{1}{n}\right)^{\tan \frac{1}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln \tan \frac{1}{n}}{n}.$$

Comme $u_n = a_n/b_n$, *il vient :*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln \sin \frac{1}{n}}{\ln \tan \frac{1}{n}} = \frac{\ln \sin \frac{1}{n}}{\ln \sin \frac{1}{n} - \ln \cos \frac{1}{n}} = \frac{1}{1 - \dfrac{\ln \cos \frac{1}{n}}{\ln \sin \frac{1}{n}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{1}.$$

Références