Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Donner des équivalents simples lorsque n tend vers $+\infty$ pour les suites de terme général :

1. $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$
2. $u_n = \dfrac{\sin\frac{1}{n} + 1}{\tan\frac{1}{n^2}}$
3. $u_n = \ln\left(n + \sqrt{n^2+1}\right)$
4. $u_n = (n + 3\ln n)e^{-(n+1)}$
5. $u_n = \dfrac{n! + e^n}{2^n + 3^n}$
6. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

Solution :

1. $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{\ln n}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\dfrac{\ln n}{n}}$ *par application des formules usuelles sur les équivalents et car* $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. $u_n = \dfrac{\sin\frac{1}{n} + 1}{\tan\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sin\frac{1}{n} + 1}{\frac{1}{n^2}} = n^2\left(\sin\frac{1}{n} + 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{n^2}$ *car* $\sin\frac{1}{n} + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
3. $u_n = \ln\left(n + \sqrt{n^2+1}\right) = \ln n + \ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}\right)$ *mais* $\dfrac{\ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}\right)}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *donc* $\ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}\right) = \underset{n\to+\infty}{o}(\ln n)$ *et donc d'après l'exercice* **??**, $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n}$.
4. $u_n = (n + 3\ln n)e^{-(n+1)} = ne^{-(n+1)}\left(1 + 3\frac{\ln n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{ne^{-(n+1)}}$ *car* $1 + 3\frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$
5. $u_n = \dfrac{n! + e^n}{2^n + 3^n} = \dfrac{n!}{3^n}\dfrac{1 + \frac{e^n}{n!}}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\dfrac{n!}{3^n}}$ *car* $\dfrac{1 + \frac{e^n}{n!}}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$
6. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n^2-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{n^2-1}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}\right)}$

$$= \frac{1}{n\sqrt{n}} \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\frac{1}{n\sqrt{n}}}$$ *car*

$$\frac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Références