Borel-Cantelli, Centrale 2015

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

24 juillet 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Borel-Cantelli, Centrale 2015 Centrales***

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(E_n) < +\infty$.

1. *Soit $Z = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{E_n}$. Montrer que Z est une variable aléatoire discrète.*
2. *Soit $F = \{\omega \in \Omega \text{ tq } \omega \text{ appartient à un nombre fini de } E_n\}$. Montrer que F est un évènement et que $\mathbb{P}(F) = 1$.*
3. *Montrer que Z admet une espérance.*

Solution :

1. *L'ensemble des valeurs possibles est $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dénombrable.*
   Pour $k \in \mathbb{N}$, $Z_k = \sum_{n=0}^{k} \mathbb{1}_{E_n}$ est une variable aléatoire discrète par addition.
   Donc $\{Z \geq p\} = \bigcup_{k=0}^{\infty}\{Z_k \geq p\}$ est un évènement pour tout $p \in \mathbb{N}$. On en déduit que les ensembles $\{Z = p\} = \{Z \geq p\} \setminus \{Z \geq p+1\}$ et $\{Z = \infty\} = \bigcap_{p=0}^{\infty}\{Z \geq p\}$ sont des évènements.
2. *$\overline{F} = \{Z = \infty\}$ est un évènement, donc F en est un.*
   Par ailleurs, $\{Z \geq p\} \subset \bigcup_{n=p-1}^{\infty} E_n$ donc $\mathbb{P}(Z \geq p) \leq \sum_{n=p-1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) \to_{p\to\infty} 0$ puis $\mathbb{P}(Z = \infty) = 0$ par continuité décroissante.
3. *Le théorème d'interversion série-espérance étant hors programme, il faut ruser ...*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{k} \mathbb{P}(E_n) &= \mathbb{E}(Z_k) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z_k \geq i) \\
&\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z_k \geq i, Z_k = Z) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z \geq i, Z_k = Z) \\
&\geq \sum_{i=1}^{I} \mathbb{P}(Z \geq i, Z_k = Z)
\end{aligned}$$

où I est un entier quelconque. A I fixé, on fait tendre k vers l'infini. Le premier membre converge vers $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)$ tandis que le dernier converge vers $\sum_{i=1}^{I} \mathbb{P}(Z \geq i, Z \neq \infty)$ par continuité croissante et finitude de I. Comme $\mathbb{P}(Z = \infty) = 0$, on a $\mathbb{P}(Z \geq i, Z \neq \infty) = \mathbb{P}(Z \geq i)$. Ainsi, pour tout I fixé :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) \geq \sum_{i=1}^{I} \mathbb{P}(Z \geq i).$$

On fait alors tendre I vers l'infini : $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) \geq \mathbb{E}(Z)$, ce qui résout la question. Comme l'inégalité inverse est triviale, on a en réalité $\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)$ et on a ainsi espérancé terme à terme...

Références