Formule de Wald

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

14 mai 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Formule de Wald***

Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ et N des variables aléatoires sur un même espace probabilisé, mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, les X_i ayant toutes même loi. On considère $S = X_1 + \cdots + X_N$ (somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires, avec la convention $S = 0$ si $N = 0$).

1. *Montrer que S est une variable aléatoire et déterminer sa fonction génératrice en fonction des fonctions génératrices de N et X_1.*
2. *En déduire $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$ avec la convention $0 \times \infty = \infty \times 0 = 0$.*

Solution :

1. $\{S = k\} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \bigcup_{k_1+\cdots+k_i=k} \{N = i, X_1 = k_1, \ldots, X_i = k_i\}$, $G_S(z) = G_N \circ G_{X_1}(z)$.
2. *Le cas où N et X_1 ont des espérances finies est immédiat, de même que le cas où une des deux variables a une espérance nulle.*
   Si $0 < \mathbb{E}(N) < \infty = \mathbb{E}(X_1)$, pour $K \in \mathbb{N}$ on considère $Y_i = \min(X_i, K)$ et $T = Y_1 + \cdots + Y_N$. On a $X_i \geq Y_i$ donc $S \geq T$ puis $\mathbb{E}(S) \geq \mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(Y_1) \geq \mathbb{E}(N) \sum_{k=0}^{K} k\mathbb{P}(X_1 = k) \to_{K\to\infty} \infty$. On traite de manière analogue le cas $0 < \mathbb{E}(X_1) < \infty = \mathbb{E}(N)$.

Références