Variables aléatoires entières

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

11 juillet 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Variables aléatoires entières***

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(a) Montrer que X a une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}(X\geq k)$ est convergente et que dans ce cas, $\mathbb{E}(X)$ est la somme de cette série.

(b) Établir une formule analogue pour $\mathbb{V}(X)$ en fonction de $\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}(X\geq k)$ et $\sum_{k\geq 1}k\mathbb{P}(X\geq k)$.

2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, à valeurs dans $\mathbb{N}$, mutuellement indépendantes et de même loi. On note pour $n\in\mathbb{N}^*$: $M_n=\max(X_1,\dots,X_n)$.

(a) Calculer $\mathbb{P}(M_n\leq k)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_1\leq k)$.

(b) On suppose que la loi de X_1 est la loi uniforme sur $[\![1,K]\!]$ avec $K\geq 2$ fixé. Calculer $\mathbb{E}(M_n)$ et $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(M_n)$.

(c) On suppose que la loi de X_1 est la loi géométrique de paramètre $p\in\,]0,1[$. Calculer $\mathbb{E}(M_n)$. Déterminer la loi de $m_2=\min(X_1,X_2)$, son espérance, et en déduire $\mathbb{E}(|X_1-X_2|)$.

Solution :

1. (a) $\sum_{k=1}^{N}\mathbb{P}(X\geq k)-\sum_{k=0}^{N-1}k\mathbb{P}(X=k)=N\mathbb{P}(X\geq N)=\sum_{k=N}^{\infty}N\mathbb{P}(X=k)$.

(b) $\sum_{k=1}^{N}2k\mathbb{P}(X\geq k)-\sum_{k=0}^{N-1}k^2\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=1}^{N-1}\mathbb{P}(X\geq k)+(N^2+1)\mathbb{P}(X\geq N)$ *donc en supposant que $\mathbb{E}(X)$ est finie, on obtient que $\mathbb{E}(X^2)$ est finie si et seulement si la série $\sum_{k=1}^{\infty}k\mathbb{P}(X\geq k)$ converge et dans ce cas,*

$$\mathbb{V}(X)=2\sum_{k=1}^{\infty}k\mathbb{P}(X\geq k)-\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X\geq k)-\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X\geq k)\Big)^2.$$

2. (a) $\mathbb{P}(M_n\leq k)=\mathbb{P}(X_1\leq k)^n$.

(b) $\mathbb{E}(M_n)=\sum_{k=1}^{K}\mathbb{P}(M_n\geq k)=K-\sum_{k=1}^{K}\mathbb{P}(M_n<k)=K-\sum_{k=1}^{K-1}(k/K)^n\to_{n\to\infty}K$.

(c)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_n) &= \sum_{k=1}^{\infty}(1-(1-(1-p)^{k-1})^n) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{n}\binom{n}{l}(-1)^{l+1}(1-p)^{(k-1)l} \\ &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{n}{l}(-1)^{l+1}(1-p)^{(k-1)l} \\ &= \sum_{l=1}^{n}\binom{n}{l}\frac{(-1)^{l+1}}{1-(1-p)^l} \quad \textit{(non simplifiable).}\end{aligned}$$

m_2 suit la loi $\mathcal{G}(2p-p^2)$ donc $\mathbb{E}(m_2) = \dfrac{1}{2p-p^2}$

et $\mathbb{E}(|X_1 - X_2|) = \mathbb{E}(M_2 - m_2) = \dfrac{2}{p} - \dfrac{1}{1-(1-p)^2} - \dfrac{1}{2p-p^2} = \dfrac{2-2p}{2p-p^2}$.

Références