Association de parieurs (Centrale MP 2015)

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

13 juillet 2024

Exercice 0.1 ★★ Association de parieurs (Centrale MP 2015) Centrales MP

Dans l'énoncé, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3 et N un entier naturel non nul.

Un jeu oppose n joueurs notés $J_1, \dots, J_n$. Le jeu consiste à lancer N fois une pièce équilibrée. Avant les lancers, chaque joueur écrit une liste de prévisions pour les lancers. Les gagnants sont les joueurs ayant obtenu le plus grand nombre de prévisions correctes : ils se partagent alors la somme de S euros.

Dans la suite, on abrégera pile en P et face en F. Par exemple, si $N = 3$ et si les lancers donnent PPF, le joueur ayant prédit PFP aura une prévision correcte (l'ordre compte). Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i le nombre de prévisions correctes du joueur J_i et G_i son gain.

1. *Dans cette question, on suppose que les joueurs choisissent leur prédiction au hasard indépendamment les uns des autres. On admet que dans ces conditions, les variables aléatoires X_i sont mutuellement indépendantes et de même loi.*
   - (a) *Justifier que les variables G_i ont même loi. On ne demande pas de déterminer explicitement cette loi.*
   - (b) *Justifier que l'espérance de G_i est S/n pour tout i.*
   - (c) *Vérifier expérimentalement ce fait à l'aide d'une simulation en Python.*
2. *Dans cette question, on suppose que les joueurs $J_1, J_3, \dots, J_n$ choisissent leur prédiction au hasard indépendamment les uns des autres et le joueur J_2 choisit les prévisions contraires de celles de J_1. Par exemple, si $N = 3$ et J_1 choisit PFP alors J_2 choisit FPF. On admet qu'alors les variables aléatoires $X_1, X_3, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes de même que les variables $X_2, X_3, \dots, X_n$. A l'issue du jeu, les joueurs J_1 et J_2 se partagent leurs gains éventuels. On pose $G' = G_1 + G_2$ et $Y = \max(X_1, X_2)$. On suppose enfin que N est impair : $N = 2p + 1$.*
   - (a) *Montrer que les X_i suivent toutes la même loi que l'on précisera. Dans la suite, on notera $q_k = \mathbb{P}(X_i = k)$ et $\tau_k = \mathbb{P}(X_i \leq k)$.*
   - (b) *Préciser l'ensemble V des valeurs prises par Y.*
   - (c) *Soient $j \in [\![1, n-1]\!]$ et $k \in V$. Calculer $\mathbb{P}(G' = S/j, Y = k)$ en fonction de q_k et τ_{k-1}.*

(d) *En déduire* $\mathbb{E}(G'), \mathbb{E}(G_1)$ *et* $\mathbb{E}(G_2)$. *La stratégie adoptée par* J_1 *et* J_2 *est-elle avantageuse ?*

3. *Reprendre le modèle de la question précédente en supposant* N *pair :* $N = 2p$. *On vérifiera qu'alors* $\mathbb{E}(G') = \dfrac{2S}{n-1}\Big(1 - \dfrac{\tau_p^n}{nq_p} + \dfrac{\tau_{p-1}^n}{nq_p}\Big)$. *La stratégie adoptée par* J_1 *et* J_2 *est-elle avantageuse ?*

Solution :

1. (a) *Pour* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in [\![0, N]\!]^n$ *on note* $f(x) = \max(x_1, \ldots, x_n)$, $h(x) = \mathrm{card}\{i \text{ tq } x_i = f(x)\}$ *et* $g_i(x) = S/h(x)$ *si* $x_i = f(x)$, $g_i(x) = 0$ *sinon.*
   Ainsi pour toute issue ω, *on a* $G_i(\omega) = g_i(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ *d'où pour* $g \in \mathbb{R}$ *et* $\sigma \in S_n$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G_i = g) &= \sum_{x \in [\![0,N]\!]^n \text{ tq } g_i(x) = g} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \\
&= \sum_{x \in [\![0,N]\!]^n \text{ tq } g_i(x) = g} \mathbb{P}(X_1 = x_1) \ldots \mathbb{P}(X_1 = x_n) \\
&= \sum_{x \in [\![0,N]\!]^n \text{ tq } g_i(x) = g} \mathbb{P}(X_1 = x_{\sigma(1)}) \ldots \mathbb{P}(X_1 = x_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{y \in [\![0,N]\!]^n \text{ tq } g_{\sigma^{-1}(i)}(y) = g} \mathbb{P}(X_1 = y_1) \ldots \mathbb{P}(X_1 = y_n) \\
&= \mathbb{P}(G_{\sigma^{-1}(i)} = g).
\end{aligned}$$

   (b)

2. (a) $p_k = 2^{-N}\binom{N}{k}$.
   (b) $V = [\![p+1, N]\!]$.
   (c) $\mathbb{P}(G' = S/j, Y = k) = \mathbb{P}(G' = S/j, X_1 = k) + \mathbb{P}(G' = S/j, X_1 = N-k) = 2\binom{n-2}{j-1} q_k^j \tau_{k-1}^{n-1-j}$.
   (d)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G') &= \sum_{k=p+1}^{N} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{2S}{j} \binom{n-2}{j-1} q_k^j \tau_{k-1}^{n-1-j} \\
&= \sum_{k=p+1}^{N} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{2S}{n-1} \binom{n-1}{j} q_k^j \tau_{k-1}^{n-1-j} \\
&= \sum_{k=p+1}^{N} \frac{2S}{n-1} \Big((q_k + \tau_{k-1})^{n-1} - \tau_{k-1}^{n-1} \Big) \\
&= \sum_{k=p+1}^{N} \frac{2S}{n-1} \Big(\tau_k^{n-1} - \tau_{k-1}^{n-1} \Big) \\
&= \frac{2S}{n-1} \Big(\tau_N^{n-1} - \tau_p^{n-1} \Big) \\
&= \frac{2S}{n-1} \Big(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \Big).
\end{aligned}$$

Comme $G_1 = G_2 = \frac{1}{2}G'$, on obtient $\mathbb{E}(G_1) = \mathbb{E}(G_2) = \dfrac{S}{n-1}\left(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right) > \dfrac{S}{n}$ pour tout $n \geq 3$.

3. *Calculs abominables ... En admettant la formule donnée, $\tau_p^n - \tau_{p-1}^n \simeq nq_p\tau_p^{n-1}$ par accroissements finis, et $\tau_p \simeq \frac{1}{2}$ donc J_1 et J_2 ont probablement encore intérêt à s'associer.*

Références