Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

14 octobre 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

1. *Montrer que la suite de terme général*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

converge vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$. begindivindicbegintexténdtextEtudier les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) et montrer qu'elles sont adjacentes. enddivindic

2. *Calculer une valeur approchée de l à 10^{-1} près.*

Solution :

1. *Définissons les deux suites extraites $(u_n) = (S_{2n})$ et $(v_n) = (S_{2n+1})$. On calcule pour $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leqslant 0$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \geqslant 0$$

donc (u_n) est décroissante et (v_n) croissante. Si $(d_n) = (u_n - v_n)$,

$$d_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Les deux suites (S_{2n}) et $S_{2n+1})$ sont adjacentes et convergent donc vers la même limite finie l.

2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l est toujours compris entre S_n et S_{n+1}. Il vient donc que*

$$|S_n - l| \leqslant |S_n - S_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Pour que S_n soit une valeur approchée de l à 10^{-1} près, il suffit que $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 10^{-1}$, c'est-à-dire $\boxed{n \geqslant 99}$.
On calcule alors $S_{99} = -0.6$.

Références