

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

1. Montrer que la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

converge vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$.

Indication 0.0 : Étudier les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) et montrer qu'elles sont adjacentes.

2. Calculer une valeur approchée de l à 10^{-1} près.

Solution :

1. Définissons les deux suites extraites $(u_n) = (S_{2n})$ et $(v_n) = (S_{2n+1})$. On calcule pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leq 0$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \geq 0$$

donc (u_n) est décroissante et (v_n) croissante. Si $(d_n) = (u_n - v_n)$,

$$d_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Les deux suites (S_{2n}) et $S_{2n+1})$ sont adjacentes et convergent donc vers la même limite finie l .

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l est toujours compris entre S_n et S_{n+1} . Il vient donc que

$$|S_n - l| \leq |S_n - S_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Pour que S_n soit une valeur approchée de l à 10^{-1} près, il suffit que $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 10^{-1}$, c'est-à-dire $n \geq 99$.
On calcule alors $S_{99} = -0.6$.

Références