Temps d'attente

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

22 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Temps d'attente***

On lance une infinité de fois une pièce et on considère l'évènement A_k = « au cours des k premiers lancers, il n'est jamais sorti trois pile de suite »avec la convention $A_0 = \Omega$.

1. *En supposant les lancers mutuellement indépendants et la pièce équilibrée, montrer que $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(A_{k-1}) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(A_{k-2}) + \frac{1}{8}\mathbb{P}(A_{k-3})$ pour $k \geq 3$.*
2. *On note α, β, γ les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^3 - X^2/2 - X/4 - 1/8$. Montrer, sans les calculer, que $\max(|\alpha|, |\beta|, |\gamma|) < 1$ et en déduire $\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(A_k)$.*
3. *Reprendre l'exercice avec l'évènement B_k = « au cours des k premiers lancers, il n'est jamais sorti la séquence PFP ».*
4. *Soit S une suite fixée dans $\{P, F\}^N$. Montrer, sans calcul, qu'il est presque certain que S apparaît au moins une fois lors d'une infinité de tirages mutuellement indépendants, avec P et F de probabilité $\frac{1}{2}$ à chaque lancer. Montrer qu'il est presque certain que S apparaît une infinité de fois dans les mêmes conditions ; et montrer enfin que ceci reste vrai pour toute pièce vérifiant $\mathbb{P}(P) = p \in]0, 1[$, les lancers étant toujours mutuellement indépendants.*

Solution :

1. *Conditionner par le résultat des lancers de rang $k-3, k-2, k-1$.*
2. *Par étude de fonction, il existe une unique racine réelle $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$. Les deux autres racines sont non réelles conjuguées et $|\beta| = |\gamma| = \sqrt{1/8\alpha} < \frac{1}{2}$. $\mathbb{P}(A_k)$ est combinaison linéaire des suites (α^k), (β^k), (γ^k) donc $\mathbb{P}(A_k) \to_{k\to\infty} 0$.*
3. *En conditionnant par le nombre n de pile consécutifs à la fin des k lancers, on obtient $\mathbb{P}(B_k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_{k-1}) + \sum_{n=1}^{k-2} \mathbb{P}(B_{k-n-2})/2^{n+2}$, puis $\mathbb{P}(B_{k+1}) = \mathbb{P}(B_k) - \frac{1}{4}\mathbb{P}(B_{k-1}) + \frac{1}{8}\mathbb{P}(B_{k-2})$. L'équation caractéristique admet à nouveau trois racines $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$ et β, γ non réelles conjuguées de module $< \frac{1}{2}$, d'où $\mathbb{P}(B_k) \to_{k\to\infty} 0$.*
4. *Découper la suite des lancers en blocs de taille N.*

Références