Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

2 décembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Etudiez la suite de terme général :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Indication 0.0 : *Étudier les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) et montrer qu'elles sont adjacentes.*

Solution : *Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons :*

$$\alpha_n = u_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} \quad \text{et} \quad \beta_n = u_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

La suite (α_n) est décroissante. En effet :

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{-1}{(2n+1)!} + \frac{1}{(2n+2)!} < 0$$

et (β_n) est croissante :

$$\beta_{n+1} - \beta_n = \sum_{k=0}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{(2n+2)!} + \frac{-1}{(2n+3)!} > 0$$

De plus, $\beta_n - \alpha_n = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Les deux suites sont donc adjacentes. Elles convergent alors vers la même limite $l \in \mathbb{R}$ et donc, d'après le cours comme (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont la même limite l, la suite (u_n) converge vers l.

Références