Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit une suite (u_n) telle que les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrez que la suite (u_n) converge.

Solution : *Il existe $(l, l', l'') \in \mathbb{R}^3$ tels que $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l'$ et $u_{3n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l''$. Montrons que $l = l' = l''$. Comme la suite (u_{6n}) est extraite de la suite (u_{2n}), elle converge vers l (toute suite extraite d'une suite convergente est convergente de même limite). Mais la suite (u_{6n}) est également extraite de la suite (u_{3n}) et elle converge donc vers l''. Par unicité de la limite, $l = l''$. Considérons la suite (u_{6n+3}). Comme elle est extraite de (u_{2n+1}) et de (u_{3n}), par le même raisonnement, on obtient que $l' = l''$. Par conséquent, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, et d'après le cours, on en déduit que la suite (u_n) converge.*

Références