Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

1. *Étudiez les suites de terme général*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kk!}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n^2 n!}$$

2. *Montrez que leur limite commune est irrationnelle.*

Solution : *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. *La suite (u_n) est clairement croissante. On montre de plus que :*

$$v_{n+1} - v_n == \frac{1}{(n+1)\,(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)^2\,(n+1)!} - \frac{1}{n^2 n!} = -\frac{n^2+3n+1}{(n+1)^2(n+1)!n^2}.$$

Donc (v_n) est décroissante. Comme $v_n - u_n = 1/(n^2 n!) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, les deux suites sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite $l \in \mathbb{R}$.

2. *Remarquons que comme $u_2 = 5/4$, $v_2 = 11/8$, et que $5/4 \leqslant l \leqslant 11/8$, l ne peut être un entier. Si l était rationnelle, notons la $\frac{p}{q}$ où $p, q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 2$, on aurait $u_q < \frac{p}{q} < v_q$ et en multipliant par $qq!$, il viendrait $qq!u_q < pq! < qq!u_q + \frac{1}{q}$, ce qui est une absurdité car $pq!$ est un entier.*

Références