

# Calcul de sommes

Michel Quercia<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

23 avril 2024

## Exercice 0.1 ★★ Calcul de sommes

Calculer les sommes des séries suivantes :

1.  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1}$ .
2.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ .
3.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)\dots(k+p)}$ .
4.  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^3 + 8k^2 + 17k + 10}$ .
5.  $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right)$ .
6.  $\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ .
7.  $\sum_{k=0}^{\infty} \ln\left(\cos \frac{\alpha}{2^k}\right)$ .
8.  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \tan(2^{-k}\alpha)$ .
9.  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k^3 - 3k^2 + 1}{(k+3)!}$ .
10.  $\sum_{n=p}^{\infty} \binom{n}{p} x^n$ .
11.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(1-x^k)(1-x^{k+1})}$ .
12.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k - n[k/n]}{k(k+1)}$ .

**Solution :**

1.  $\frac{3}{4}$ .
2.  $\frac{1}{4}$ .

3.  $S_p - (p+1)S_{p+1} = S_p - \frac{1}{(p+1)!} \Rightarrow S_p = \frac{1}{pp!}$ .
4.  $\frac{23}{144}$ .
5.  $\ln 3$ .
6.  $-\ln 2$ .
7.  $\ln \left( \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right)$ .
8.  $\frac{1}{\alpha} - 2 \cotan(2\alpha)$ .
9.  $109 - 40e$ .
10.  $\frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$  pour  $|x| < 1$  par récurrence.
11.  $\frac{x}{(1-x)^2}$  si  $|x| < 1$ ,  $\frac{1}{(1-x)^2}$  si  $|x| > 1$ .
12.  $S_n = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{r}{(qn+r)(qn+r+1)} = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{r}{qn+r} - \frac{r}{qn+r+1}$ .  
 $S_n = \sum_{q=0}^{\infty} \left( \frac{1}{qn+1} + \dots + \frac{1}{qn+n} - \frac{1}{q+1} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^{(N+1)n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k} \right) = \ln n$ .

## Références