

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

17 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

1. Montrer que les suites de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}, \quad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

sont adjacentes.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} \leq \ln \frac{n+1}{n} \leq \frac{1}{n}$.

3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \ln 2 \leq v_n$.

4. Que peut-on en conclure ?

Solution :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{n+1+1} + \frac{1}{n+1+2} + \cdots + \frac{1}{n+1+n-1} + \frac{1}{n+1+n} + \frac{1}{n+1+n+1} \right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \\ &= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{(n+1)(2n+2)} \end{aligned}$$

donc (u_n) est croissante. De même :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \right) - \left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} \\ &= -\frac{3n+2}{2n(n+1)(2n+1)} \end{aligned}$$

et (v_n) est décroissante. Enfin : $v_n - u_n = 1/n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Les deux suites sont donc adjacentes et convergent vers une même limite.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$. Donc : $\ln \frac{n+1}{n} = \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$. De même

$$\ln \frac{n+1}{n} = -\ln \frac{n}{n+1} = -\ln \frac{n+1-1}{n+1} = -\ln \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geq \frac{1}{n+1}.$$

3. On utilise les inégalités précédentes :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \leq \ln \frac{n+1}{n} + \ln \frac{n+2}{n+1} + \dots + \ln \frac{n+n}{n+n-1} = \ln \left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \times \dots \times \frac{n+n}{n+n-1} \right) = \ln 2.$$

$$v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \ln \frac{n+1}{n} + \ln \frac{n+2}{n+1} + \dots + \ln \frac{2n+1}{2n} = \ln \left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \times \dots \times \frac{2n+1}{2n} \right) = \ln \frac{2n+1}{n}.$$

4. Notons l la limite commune aux deux suites. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n \leq \ln 2 \leq v_n$ donc par passage à la limite $l \leq \ln 2 \leq l$ et donc $l = \ln 2$.

Références