Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

1. *Montrer que les suites de terme général*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}, \quad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

   sont adjacentes.

2. *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln \dfrac{n+1}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}.$
3. *En déduire que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leqslant \ln 2 \leqslant v_n.$
4. *Que peut-on en conclure ?*

Solution :

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. Calculons :*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{n+1+1} + \frac{1}{n+1+2} + \cdots + \frac{1}{n+1+n-1} + \frac{1}{n+1+n} + \frac{1}{n+1+n+1}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \right. \\ &= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{(n+1)(2n+2)} \end{aligned}$$

   donc (u_n) *est croissante. De même :*

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} \\ &= -\frac{3n+2}{2n(n+1)(2n+1)} \end{aligned}$$

et (v_n) *est décroissante. Enfin :* $v_n - u_n = 1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *Les deux suites sont donc adjacentes et convergent vers une même limite.*

2. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On sait que* $\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leqslant x$. *Donc :* $\ln \frac{n+1}{n} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$. *De même*
$$\ln \frac{n+1}{n} = -\ln \frac{n}{n+1} = -\ln \frac{n+1-1}{n+1} = -\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geqslant \frac{1}{n+1}.$$

3. *On utilise les inégalités précédentes :*

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \leqslant \ln \frac{n+1}{n} + \ln \frac{n+2}{n+1} + \cdots + \ln \frac{n+n}{n+n-1} = \ln\left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \times \cdots \times \frac{n+}{n+n}\right.$$
$$= \ln 2.$$

$$v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \ln \frac{n+1}{n} + \ln \frac{n+2}{n+1} + \cdots + \ln \frac{2n+1}{2n} = \ln\left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \times \cdots \times \frac{2n+1}{2n}\right) = \ln \frac{2n+1}{n} \geqslant$$

4. *Notons* l *la limite commune aux deux suites. Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a :* $u_n \leqslant \ln 2 \leqslant v_n$ *donc par passage à la limite* $l \leqslant \ln 2 \leqslant l$ *et donc* $l = \ln 2$.

Références