Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

1. *Montrez que les deux suites de terme général*
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$$
$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$
sont convergentes de même limite.
2. *En déduire un équivalent simple de la suite de terme général*
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Solution :

1. *On calcule pour $n \in \mathbb{N}^*$:*
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$$
et puisque $\sqrt{n+2} \geqslant \sqrt{n+1}$, il vient que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Donc (u_n) est croissante. On montre de même que (v_n) est décroissante. On calcule
$$0 \leqslant d_n = v_n - u_n = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
et donc (d_n) converge vers 0. Les deux suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes et convergent donc vers la même limite $l \in \mathbb{R}$.
2. *Puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = v_n + 2\sqrt{n} = 2\sqrt{n}\left(1 + \dfrac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$, il vient que $\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}}$. En effet, comme (v_n) est convergente, on sait que $\dfrac{v_n}{2\sqrt{n}} \to 0$.*

Références