Constante d'Euler et développement asymptotique de la série harmonique

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Constante d'Euler et développement asymptotique de la série harmonique***

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le terme général H_n de la série harmonique

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
2. *En déduire que* $H_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.
3. *Prouver l'inégalité :* $\forall t \in \left]-1, +\infty\right[, \quad \ln(1+t) \leqslant t$.
4. *On introduit les suites de terme général, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$u_n = H_n - \ln(n+1) \qquad \textit{et} \quad v_n = H_n - \ln n$$

   Montrer que (u_n) *et* (v_n) *sont adjacentes.*
5. *Montrer qu'il existe un réel* $\gamma \in \left]0, 1\right[$ *tel que :*

$$H_n = \ln n + \gamma + \underset{n \to +\infty}{o}(1)$$

   Le réel γ *est appelé* constante d'Euler *et cette égalité donne les deux premiers termes du* développement asymptotique *de la série harmonique.*

Solution :

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.

$$H_{2n} - H_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

2. *La suite (H_n) est clairement croissante. Par application du théorème de la limite monotone, on peut affirmer que soit elle converge vers un réel l soit elle tend vers $+\infty$. Si (H_n) convergeait vers un réel l alors il en serait de même de toute suite extraite et donc $H_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$. Par opérations sur les limites, on aurait alors :*

$$0 = l - l = \lim_{n\to+\infty} H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$$

ce qui est absurde. Par conséquent (H_n) diverge.

3. *Il suffit d'étudier la fonction* $f : \left\{ \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln(1+t) - t \end{array} \right.$.

4. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

$$u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - \ln(n+2) - H_n + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \geqslant \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0$$

donc (u_n) est croissante. De la même façon :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} + \ln\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \leqslant 0$$

et (v_n) est décroissante. De plus :

$$v_n - u_n = \ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Les deux suites sont donc bien adjacentes et elles convergent vers une même limite $\gamma \in \mathbb{R}$.

5. *Comme $u_1 = 1 - \ln(2) > 0$ et $v_1 = 1 - \ln 1 = 1$, on a nécessairement $\gamma \in]0,1[$. Par ailleurs, comme (v_n) admet γ comme limite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$H_n - \ln n - \gamma = v_n - \gamma \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et donc : $\boxed{H_n = \ln n + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)}$.

Références