

Idéaux de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

Michel Quercia¹

¹Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

21 juin 2024

Exercice 0.1 ★★ Idéaux de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

Une partie $\mathcal{I} \subset \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est appelée idéal à droite de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ si c'est un sous-groupe additif vérifiant :

$$\forall A \in \mathcal{I}, \forall B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), AB \in \mathcal{I}.$$

Pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on note \mathcal{H}_A le sev de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ engendré par les colonnes de A , et \mathcal{I}_A l'idéal à droite engendré par A : $\mathcal{I}_A = \{AM \text{ tq } M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})\}$.

1. Soient $A, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que : $M \in \mathcal{I}_A \Leftrightarrow \mathcal{H}_M \subset \mathcal{H}_A$.
2. Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathcal{H}_A + \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_C$. Simplifier alors $\mathcal{I}_A + \mathcal{I}_B$.
3. Soit \mathcal{I} un idéal à droite de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que \mathcal{I} est un sev de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, puis qu'il existe $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathcal{I} = \mathcal{I}_A$.
4. Que peut-on dire des idéaux à gauche de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$?

Références