Idéaux de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

7 juin 2024

Exercice 0.1 ★★ **Idéaux de** $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

Une partie $\mathcal{I} \subset \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *est appelée* idéal à droite de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *si c'est un sous-groupe additif vérifiant :*

$$\forall A \in \mathcal{I},\ \forall B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ AB \in \mathcal{I}.$$

Pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$*, on note* $\mathcal{H}_A$ *le sev de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *engendré par les colonnes de* A*, et* $\mathcal{I}_A$ *l'idéal à droite engendré par* A *:* $\mathcal{I}_A = \{AM \text{ tq } M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})\}$.

1. *Soient* $A, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$*. Montrer que :* $M \in \mathcal{I}_A \Leftrightarrow \mathcal{H}_M \subset \mathcal{H}_A$.
2. *Soient* $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$*. Montrer qu'il existe* $C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que* $\mathcal{H}_A + \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_C$*. Simplifier alors* $\mathcal{I}_A + \mathcal{I}_B$.
3. *Soit* $\mathcal{I}$ *un* idéal à droite *de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$*. Montrer que* $\mathcal{I}$ *est un sev de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$*, puis qu'il existe* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que* $\mathcal{I} = \mathcal{I}_A$.
4. *Que peut-on dire des* idéaux à gauche *de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *?*

Références