Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Montrer que les suites de terme général

$$u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}$$

sont adjacentes.

Solution : *La suite (u_n) est clairement croissante. Montrons que (v_n) est décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{3\left(n+1\right)^2} - \frac{1}{3n^2} = \frac{1}{n^2(n+1)^2} + \frac{1}{3\left(n+1\right)^2} - \frac{1}{3n^2} = \frac{3 + n^2 - \left(n+1\right)^2}{3n^2\left(n+1\right)^2} = 2\frac{\left(-n+1\right)}{3n^2\left(n+1\right)^2}$$

et cette quantité est négative ou nulle dés que $n \geqslant 1$. Par suite (v_n) est décroissante. Il est de plus clair que $v_n - u_n = \frac{1}{3n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et les deux suites sont donc bien adjacentes.

Références