

Matrices magiques

Michel Quercia¹

¹Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

21 juin 2024

Exercice 0.1 ★★ Matrices magiques

Une matrice carrée M est dite magique si les sommes des coefficients de M par ligne et par colonne sont constantes. On note $s(M)$ leur valeur commune.

Soit $U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{M} = \{\text{matrices } n \times n \text{ magiques}\}$.

1. Montrer que \mathcal{M} est une sous-algèbre de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $s : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{K}$ est un morphisme d'algèbre (calculer MU et UM).
2. Si M est magique inversible, montrer que M^{-1} est aussi magique.
3. Montrer que si $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, \mathcal{M} est la somme directe du sev des matrices magiques symétriques et du sev des matrices magiques antisymétriques.
4. Pour $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on note φ_M l'endomorphisme de \mathbb{K}^n canoniquement associé à M .
Soit $\mathcal{H} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tq } x_1 + \dots + x_n = 0\}$ et $\mathcal{K} = \{(x, \dots, x) \in \mathbb{K}^n\}$.
 - (a) Montrer que $M \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \mathcal{H}$ et \mathcal{K} sont stables par φ_M .
 - (b) En déduire $\dim(\mathcal{M})$.

Références