Matrices magiques

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

6 juin 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Matrices magiques***

Une matrice carrée M est dite magique *si les sommes des coefficients de M par ligne et par colonne sont constantes. On note $s(M)$ leur valeur commune.*

Soit $U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{M} = \{$matrices $n \times n$ magiques$\}$.

1. *Montrer que $\mathcal{M}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $s : \mathcal{M} \to \mathbb{K}$ est un morphisme d'algèbre (calculer MU et UM).*
2. *Si M est magique inversible, montrer que M^{-1} est aussi magique.*
3. *Montrer que si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, $\mathcal{M}$ est la somme directe du sev des matrices magiques symétriques et du sev des matrices magiques antisymétriques.*
4. *Pour $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on note φ_M l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M.*
   Soit $\mathcal{H} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tq } x_1 + \dots + x_n = 0\}$ et $\mathcal{K} = \{(x, \dots, x) \in \mathbb{K}^n\}$.
   (a) *Montrer que : $M \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ sont stables par φ_M.*
   (b) *En déduire $\dim(\mathcal{M})$.*

Références