

# Classes d'équivalence dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$

Michel Quercia<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

31 mai 2024

## Exercice 0.1 ★★ Classes d'équivalence dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$

1. Soit  $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$ . Montrer que  $M \in GL_n(\mathbb{Z})$  si et seulement si  $|\det M| = 1$ .
2. Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$  et  $d$  le pgcd de  $x_1, \dots, x_n$ . Montrer qu'il existe  $A \in GL_n(\mathbb{Z})$  telle que  $AX = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  (par récurrence sur  $n$ ).
3. Soient  $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$ . CNS pour qu'il existe  $A \in GL_n(\mathbb{Z})$  telle que  $AX = Y$  ?

## Références