

Classes d'équivalence dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$

Michel Quercia¹

¹Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

14 juin 2024

Exercice 0.1 ★★ Classes d'équivalence dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$

1. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $|\det M| = 1$.
2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$ et d le pgcd de x_1, \dots, x_n . Montrer qu'il existe $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ telle que $AX = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (par récurrence sur n).
3. Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$. CNS pour qu'il existe $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ telle que $AX = Y$?

Références