Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 novembre 2022

Exercice 0.1 ***Pas de titre***

Montrer que les suites suivantes (u_n) et (v_n), données par leur terme général, sont adjacentes :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$ *et* $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$
2. $u_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$ *et* $v_n = u_n + \dfrac{1}{n\ n!}$

Solution :

1. *La suite (u_n) est clairement croissante et $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Il reste à montrer que (v_n) est décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a*

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = 2\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!} < 0$$

dés que $n > 1$ et donc (v_n) est décroissante.

2. *La suite (u_n) est clairement croissante et $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrons que (v_n) est décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :*

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)\,(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\,(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} = \frac{n\,(n+1) + n - (n+1)^2}{n\,(n+1)\,(n+1)!} \\ &= -\frac{1}{n\,(n+1)\,(n+1)!} < 0. \end{aligned}$$

Références