

Forme bilinéaire trace

Michel Quercia¹

¹Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

14 juin 2024

Exercice 0.1 ★★ Forme bilinéaire trace

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ non nulle. Montrer que l'application $f_A : \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, X \mapsto \text{tr}(AX)$ est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
2. Réciproquement : Soit $\varphi : \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire quelconque. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que $\varphi = f_A$ (on pourra considérer l'application $A \mapsto f_A$).
3. Soit $\varphi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire vérifiant : $\forall X, Y \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \varphi(XY) = \varphi(YX)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \text{tr}$.

Références