Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

25 janvier 2022

Exercice 0.1 ***Pas de titre***

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la suite (u_n) donnée par :

$$\begin{cases} u_0 = a, \quad u_1 = b \\ u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n) \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons de plus : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. *Montrer que (v_n) est une suite géométrique.*
2. *Calculer, en fonction de n, la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$.*
3. *En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n ainsi que la limite de (u_n).*

Solution :

1. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_{n+2} - u_{n+1}}{u_{n+1} - u_n} = \dfrac{\frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n) - u_{n+1}}{u_{n+1} - u_n} = -\dfrac{1}{2}$. La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$. Son premier terme est $v_0 = u_1 - u_0 = b - a$.*
2. *On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (b-a)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule :*
   $S_n = (b-a)\dfrac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \dfrac{1}{2}} = \dfrac{2(b-a)}{3}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$.
3. *Par télescopage, on a aussi $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = u_n - u_0$ et donc $u_n = \dfrac{2(b-a)}{3}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right) + a$. On en déduit que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \boxed{\dfrac{a+2b}{3}}$.*

Références