

# Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron<sup>1</sup>, Alain Soyeur<sup>2</sup>, and François Capaces<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

<sup>2</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

<sup>3</sup>, ,

24 juin 2023

## Exercice 0.1 Pas de titre

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . On considère la suite  $(u_n)$  donnée par :

$$\begin{cases} u_0 = a, & u_1 = b \\ u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n) \end{cases}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons de plus :  $v_n = u_{n+1} - u_n$ .

1. Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique.
2. Calculer, en fonction de  $n$ , la somme  $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$ .
3. En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  en fonction de  $n$  ainsi que la limite de  $(u_n)$ .

### Solution :

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a :  $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+2} - u_{n+1}}{u_{n+1} - u_n} = \frac{\frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n) - u_{n+1}}{u_{n+1} - u_n} = -\frac{1}{2}$ . La suite  $(v_n)$  est donc une suite géométrique de raison  $-\frac{1}{2}$ . Son premier terme est  $v_0 = u_1 - u_0 = b - a$ .
2. On en déduit que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = (b - a) \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On calcule :
$$S_n = (b - a) \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2(b - a)}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right).$$
3. Par télescopage, on a aussi  $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = u_n - u_0$  et donc  $u_n = \frac{2(b - a)}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) + a$ . On en déduit que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{\frac{a + 2b}{3}}$ .

## Références