Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

29 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★★ **Pas de titre**

Soient deux réels $a_0 > 0$ et $b_0 > 0$. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

1. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leqslant b_n$.*
2. *Montrer que (a_n) et (b_n) sont monotones à partir du rang 1, qu'elles convergent et qu'elles ont la même limite.*

Solution :

1. *On montre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ et $b_n > 0$, ce qui montre que a_n et b_n sont définis pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n}\sqrt{b_n} \leqslant \frac{1}{2}(\sqrt{a_n}^2 + \sqrt{b_n}^2) = b_{n+1}$$

   ce qui montre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leqslant b_n$.

2. *Soit $n \geqslant 1$. Calculons*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\frac{b_n}{a_n}} \geqslant \sqrt{\frac{a_n}{a_n}} = 1 \text{ et } b_{n+1} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \leqslant 0$$

   (on a utilisé que $a_n \leqslant b_n$). Donc $\forall n \geqslant 1$, $a_{n+1} \geqslant a_n$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$. On a alors prouvé que (a_n) est croissante et (b_n) décroissante. Puisque

$$a_1 \leqslant \dots \leqslant a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant \dots b_1$$

   La suite (a_n) est croissante et majorée par b_1. Donc elle converge vers $l \in \mathbb{R}$. De même, la suite (b_n) est décroissante et minorée par a_1, et donc elle converge vers $l' \in \mathbb{R}$. De plus, la suite (a_{n+1}) est extraite de (a_n) et elle converge donc vers l. De même, la suite extraite (b_{n+1}) converge vers l'. En passant à la limite dans les relations de récurrence, on obtient :

$$l = \sqrt{ll'} \text{ et } l = \frac{l + l'}{2}$$

De la deuxième, on tire que $l = l'$.

Les deux suites convergent donc vers la même limite.

Remarque 0.1 *Cette exercice peut être aussi traîté en montrant que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.*

Références