Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soit une suite (u_n) bornée vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2u_n \leqslant u_{n+1} + u_{n-1}$$

On définit une suite (v_n) en posant pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrez que la suite (v_n) converge et calculez sa limite.

Indication 0.0 : *Montrez que la suite (v_n) est croissante et majorée. Montrez ensuite par l'absurde que sa limite vaut 0. (on pourra si $l > 0$ minorer (u_n) à partir d'un certain rang par une suite qui diverge vers $+\infty$).*

Solution : *On calcule pour $n \geqslant 1$,*

$$v_n - v_{n-1} = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} \geqslant 0$$

et donc la suite (v_n) est croissante. On suppose de plus que (u_n) est bornée :

$$\exists M \in \mathbb{R} \ : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad -M \leqslant u_n \leqslant M$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{n+1} - u_n \leqslant M + M \leqslant 2M$$

La suite (v_n) est donc croissante et majorée par $2M$.

D'après le théorème de la limite monotone, la suite (v_n) converge vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$.

Montrons par l'absurde que $l = 0$. Supposons que $l \neq 0$ et étudions les deux cas suivants :

1. *Si $l > 0$, en posant $k = \dfrac{l}{2}$, puisque $k < l$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $v_n \geqslant \dfrac{l}{2}$.*
   Mais alors pour $n \geqslant N + 1$, on a :

   $$u_n \geqslant u_{n-1} + \frac{l}{2} \geqslant u_{n-2} + 2\frac{l}{2} \geqslant \cdots \geqslant u_N + (n - N)\frac{l}{2}$$

   On a alors $w_n = u_N - N\dfrac{l}{2} + n\dfrac{l}{2} \to +\infty$ et donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, ce qui est impossible car on a supposé que la suite (u_n) était bornée.

2. *Si $l < 0$, on montre qu'à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant -\dfrac{l}{2}$. Mais on majore alors (u_n) par une suite qui diverge vers $-\infty$ ce qui est impossible.*

Références