Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère une suite d'entiers (q_n) strictement croissante avec $q_0 \geqslant 1$. On définit la suite (u_n) de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \prod_{j=0}^{k} \frac{1}{q_j}.$$

Montrer que (u_n) converge.

Solution : *On vérifie que la suite est croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$u_{n+1} - u_n = \prod_{j=0}^{n+1} \frac{1}{q_j} > 0.$$

Ensuite, comme (q_n) est strictement croissante, on peut affirmer que pour tout $k \geqslant 1$, on a $q_k \geqslant 2$. Par conséquent,

$$u_n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} \leqslant 2$$

La suite (u_n) est croissante et majorée, elle converge d'après le théorème de la limite monotone.

Références