# Magistère de Ker Lann 2010

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

11 avril 2024

***Exercice 0.1*** ★★ ***Magistère de Ker Lann 2010***

1. *Calculer pour* $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ *:* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\left(\frac{1}{2^k}\right)^i\left(\frac{1}{2^k}\right)^j$.
2. *Soient* $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. *Calculer* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} P\left(\frac{1}{2^k}\right) Q\left(\frac{1}{2^k}\right)$.
3. *On note* $(P|Q)$ *cette limite. Justifier qu'on définit ainsi un produit scalaire sur* $\mathbb{R}[X]$.
4. *Soit la forme linéaire* $\Phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}, P \mapsto P(0)$.
   *Montrer qu'il n'existe pas de* $Q \in \mathbb{R}[X]$ *tel que, pour tout* $P \in \mathbb{R}[X]$, $\Phi(P) = (P|Q)$. *Commenter.*

***Solution :***

1. $\dfrac{2^{i+j+1}}{2^{i+j+1} - 1}$.
2. *Décomposer* $P, Q$ *sur la base canonique de* $\mathbb{R}[X]$. *On peut aussi remarquer que la série converge car* $P$ *et* $Q$ *sont bornés sur* $[0, 1]$.
3. *Si* $Q$ *existe alors pour* $P = X^n$ *on obtient :*

$$S_0 = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} Q(2^{-k}) = 1 \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(n+1)k} Q(2^{-k}) = 0 \text{ pour tout } n \leq 1.$$

*On a facilement* $S_n \to_{n\to\infty} Q(1)$, *d'où* $Q(1) = 0$ *et* $2^{n+1} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(n+1)(k-1)} Q(2^{-k}) \to_{n\to\infty} Q(\frac{1}{2})$. *Ainsi* $Q(\frac{1}{2}) = 0$ *et de proche en proche,* $Q(2^{-k}) = 0$ *pour tout* $k$. *Ceci implique* $Q = 0$, *en contradiction avec la valeur de* $S_0$. *Ainsi* $\Phi$ *n'est pas représentable par un produit scalaire, ce qui fournit un contre-exemple au théorème de Riesz en dimension infinie. On peut remarquer d'ailleurs que* $\Phi$ *est discontinue pour le produit scalaire choisi : si* $P_n = (1 - X)(1 - 2X) \ldots (1 - 2^n X)$, *on a* $\Phi(P_n) = 1$ *et* $\|P_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} P^2(2^{-k}) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} \to_{n\to\infty} 0$.

## Références